

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXXVI.

**I. Die Kräfte electrischer Schwingungen,
behandelt nach der Maxwell'schen Theorie;
von H. Hertz.**

(Hierzu Taf. I Fig. 1—6.)

Die Ergebnisse der Versuche, welche ich über schnelle electrische Schwingungen angestellt habe, scheinen mir der Maxwell'schen Theorie ein Uebergewicht über die anderen Theorien der Electrodynamik zu verleihen. Gleichwohl habe ich der ersten Deutung jener Versuche ältere Anschauungen zu Grunde gelegt, indem ich die Erscheinungen zum Theil zu erklären suchte aus dem Zusammentreffen der electrostatischen und der electrodynamischen Kraft. Der Maxwell'schen Theorie in reiner Entwicklung ist ein derartiger Unterschied fremd. Ich wünsche deshalb gegenwärtig zu zeigen, dass auch auf Grund der Maxwell'schen Theorie die Erscheinungen gedeutet werden können, ohne jene Trennung einzuführen. Gelingt dieser Versuch, so ist damit die Frage nach der besonderen Ausbreitung der electrostatischen Kraft als bedeutungslos in Maxwell's Theorie von selbst erledigt.

Auch abgesehen von dem besonderen Zwecke ist ein näherer Einblick in das Spiel der Kräfte um eine geradlinige Schwingung nicht ohne Interesse.

Die Formeln.

Wir haben es im Folgenden fast allein mit den Kräften im freien Aether zu thun. Es seien also in demselben X, Y, Z die Componenten der electrischen Kraft nach den Coordinaten der x, y, z^1), es seien L, M, N die entsprechenden Componenten

1) Geht die Richtung der positiven x nach vorn, der positiven z nach oben, so möge die Richtung der positiven y nach rechts gehen. Ohne

der magnetischen Kraft, beide Kräfte gemessen in Gaussischem Maasse¹⁾, es messe t die Zeit und A sei die reciproke Lichtgeschwindigkeit. Dann ist nach Maxwell die zeitliche Aenderung der Kräfte von ihrer räumlichen Vertheilung abhängig nach folgenden Gleichungen:

$$(1) \begin{cases} A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{cases}$$

Von Anfang an soll sein, und zu jeder Zeit muss daher sein:

$$(3) \quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0, \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0.$$

Die in einem Raumtheil τ des Aethers enthaltene electricische Energie ist gleich $1/8\pi \cdot \int (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau$, die magnetische Energie gleich $1/8\pi \cdot \int (L^2 + M^2 + N^2) d\tau$, die Integrale über den Raum τ erstreckt. Die Gesamtenergie ist die Summe dieser beiden Theilenergien.

Diese Aussagen bilden, was den Aether anlangt, den wesentlichen Bestandtheil der Maxwell'schen Theorie. Maxwell gelangte zu denselben, indem er von Fernkräften ausging und dem Aether die Eigenschaften eines in hohem Grade dielectricisch polarisirbaren Mittels beilegte. Man kann auch auf anderen Wegen zu denselben gelangen. Auf keinem Wege kann indessen bislang ein directer Beweis für jene Gleichungen aus der Erfahrung erbracht werden. Es erscheint deshalb am folgerichtigsten, dieselben unabhängig von dem Wege, auf welchem man zu ihnen gelangt ist, als eine hypothetische Annahme zu betrachten und ihre Wahrscheinlichkeit auf der sehr grossen Zahl an Gesetzmässigkeiten beruhen zu lassen, welche sie zusammenfassen. Stellt man sich auf diesen Standpunkt, so kann man eine Reihe von Hilfsbegriffen entbehren, welche das Verständniss der Maxwell'schen Theorie erschweren, zum

diese Festsetzung würde das Vorzeichen der electricischen und magnetischen Kräfte in den folgenden Gleichungen nicht die conventionelle Bedeutung behalten.

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 17. p. 48. 1882.

Theil aus keinem anderen Grunde, als weil sie in der That keine Bedeutung besitzen¹⁾, sobald man endgültig die Vorstellung unvermittelter Fernkräfte ausschliesst.

Durch Multiplication der Gleichungen (1) mit L, M, N , der Gleichungen (2) mit X, Y, Z , Addition sämtlicher Gleichungen und Integration über einen Raum, dessen Raumelement $d\tau$, und dessen Oberflächenelement $d\omega$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int (X^2 + Y^2 + Z^2) d\tau + \frac{1}{8\pi} \int (L^2 + M^2 + N^2) d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi A} \int \{ (NY - MZ) \cos n, x + (LZ - NX) \cos n, y \\ & \quad + (MX - LY) \cos n, z \} d\omega, \end{aligned}$$

worin n, x, n, y, n, z die Winkel bezeichnen, welche die Normale von $d\omega$ mit den Axen bildet.

Die Gleichung zeigt, dass man den Betrag, um welchen die Energie des Raumes zugenommen hat, betrachten kann als eingetreten durch die Oberflächenelemente. Der durch jedes einzelne Oberflächenelement eintretende Betrag ist gleich dem Product aus den in die Oberfläche fallenden Componenten der electrischen und der magnetischen Kraft, multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, welchen sie miteinander bilden, und dividirt durch $4\pi A$. Auf dieses Resultat hat bekanntlich Hr. Poynting²⁾ eine höchst bemerkenswerthe Theorie über die Bewegung der Energie im electromagnetischen Felde gegründet.

Hinsichtlich der Lösung der Gleichungen beschränken wir uns auf den besonderen, aber wichtigen Fall, dass die Vertheilung der electrischen Kraft symmetrisch um die z -Axe ist, und zwar derart, dass diese Kraft in jedem Punkte in die durch die z -Axe gelegte Meridianebene fällt und nur abhängig ist von der z -Coordinate des Punktes und seinem Abstand $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ von der z -Axe. Wir bezeichnen die Componente der electrischen Kraft in der Richtung von ρ , nämlich $X\rho/\rho + Y\rho/\rho$ mit R , ferner die Componente der magnetischen Kraft, welche auf der Meridianebene senkrecht steht, nämlich

1) Als Beispiel erwähne ich den Begriff einer Dielectricitätsconstante des Aethers.

2) J. H. Poynting, Phil. Trans. 1884. II. p. 343.

$Ly/\varrho - Mx/\varrho$ mit P . Wir behaupten alsdann: Ist II eine übrigens beliebige Function von ϱ, z, t , welche der Gleichung:

$$A^2 d^2 II / dt^2 = \Delta II$$

genügt, und setzen wir $Q = \varrho dII/d\varrho$, so bezeichnet das System:

$$\begin{aligned} \varrho Z &= dQ/d\varrho, & \varrho P &= A dQ/dt, \\ \varrho R &= -dQ/dz, & N &= 0 \end{aligned}$$

eine mögliche Lösung unserer Gleichungen.

Um die Behauptung zu beweisen, beachten wir, dass wir haben:

$$\begin{aligned} X &= R \frac{d\varrho}{dx} = -\frac{d^2 II}{dx dz}, & L &= P \frac{d\varrho}{dy} = A \frac{d^2 II}{dy dt}, \\ Y &= R \frac{d\varrho}{dy} = -\frac{d^2 II}{dy dz}, & M &= -P \frac{d\varrho}{dx} = -A \frac{d^2 II}{dx dt}, \\ Z &= \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dII}{d\varrho} \right) = \frac{d^2 II}{dx^2} + \frac{d^2 II}{dy^2}, & N &= 0. \end{aligned}$$

Man hat nur nöthig, diese Ausdrücke in die Gleichungen (1), (2), (3) einzusetzen, um die Gleichungen (2) und (3) identisch, die Gleichungen (1) aber unter Berücksichtigung der Differentialgleichung von II erfüllt zu finden.

Es sei erwähnt, dass auch umgekehrt, von gewissen praktisch bedeutungslosen Beschränkungen abgesehen, sich jede mögliche Vertheilung der electricischen Kraft, welche symmetrisch um die z -Axe ist, in obiger Form darstellen lässt, doch ist es für das Folgende nicht nöthig, auf diese Behauptung einzugehen.

Von Wichtigkeit ist uns die Function Q . Die Linien nämlich, in welchen die Rotationsflächen $Q = \text{constans}$ ihre Meridianebenen schneiden, sind die electricischen Kraftlinien; die Construction derselben für eine Meridianebene vermag in jedem Augenblicke ein anschauliches Bild der Kraftvertheilung zu liefern. Schneiden wir den schalenförmigen Raum, welcher zwischen der Fläche Q und der Fläche $Q + dQ$ liegt, an verschiedenen Stellen durch Rotationsflächen um die z -Axe, so ist für alle solche Querschnitte das Product aus electricischer Kraft und Querschnitt, welches Maxwell die Induction durch den Querschnitt nennt, das gleiche. Legen wir das System der Flächen $Q = \text{constans}$ so, dass von der einen zur anderen

Q um den gleichen Betrag dQ wächst, so gilt die gemachte Aussage auch, wenn wir die Querschnitte der verschiedenen entstehenden Räume untereinander vergleichen. In der ebenen Figur, welche durch den Schnitt der Meridianebenen mit den äquidistanten Flächen $Q = \text{constans}$ entsteht, ist die electrische Kraft dem senkrechten Abstand zweier Linien $Q = \text{constans}$ nur dann umgekehrt proportional, wenn die verglichenen Punkte in gleichem Abstände von der z -Axe liegen; allgemein gilt die Regel, dass die Kraft umgekehrt proportional ist dem Product aus jenem Abstand und der Coordinate ϱ des betrachteten Punktes.

Neben ϱ und z führen wir in der Folge noch Polarcordinaten r und θ ein, welche mit jenen verknüpft sind durch die Gleichungen $\varrho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. Es bezeichnet alsdann r den Abstand vom Nullpunkt unseres Coordinatensystems.

Die Kräfte um eine geradlinige Schwingung.

Es sei verstanden unter E eine Electricitätsmenge, unter l eine Länge, unter $m = \pi/\lambda$ eine reciproke Länge und unter $n = \pi/T$ eine reciproke Zeit. Wir setzen nun:

$$H = El \frac{\sin(mr - nt)}{r}.$$

Dieser Werth genügt der Gleichung $A^2 d^2 H / dt^2 = \Delta H$, sobald wir festsetzen, dass $m/n = T/\lambda = A$, λ/T also gleich der Lichtgeschwindigkeit sein soll. Und zwar geschieht der angeführten Gleichung Genüge überall, ausser im Nullpunkt des Coordinatensystems.

Um zu erfahren, welche electrischen Vorgänge in diesem Punkte der durch H gegebenen Kräftevertheilung entsprechen, untersuchen wir seine nächste Umgebung. Wir setzen daher r verschwindend gegen λ und vernachlässigen mr gegen nt . Es wird alsdann $H = El \sin nt / r$. Da nun:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{r} \right),$$

so haben wir:

$$X = - d^2 H / dx dz, \quad Y = - d^2 H / dy dz, \quad Z = - d^2 H / dz dz.$$

Die electrischen Kräfte erscheinen also hier als die Ableitungen eines Potentials:

$$q = \frac{dH}{dz} = El \sin nt \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \right),$$

und dieses entspricht einem electrischen Doppelpunkt, dessen Axe in die z -Axe fällt, und dessen Moment mit der Periode T zwischen den extremen Werthen $+El$ und $-El$ hin und her schwankt. Unsere Kraftvertheilung stellt also die Wirkung einer geradlinigen Schwingung dar, welche die sehr kleine Länge l hat, und an deren Polen im Maximum die Electricitätsmengen $+E$ und $-E$ frei werden. Die magnetische Kraft senkrecht auf der Richtung der Schwingung in unmittelbarer Nähe derselben ergibt sich zu:

$$P = -AEl n \cos nt \sin \theta / r^2.$$

Entsprechend dem Biot-Savart'schen Gesetz ist dies die Kraft eines in die Richtung der z -Axe fallenden Stromelementes von der Länge l , dessen Intensität, magnetisch gemessen, zwischen den extremen Werthen $+\pi AE/T$ und $-\pi AE/T$ hin und her schwankt. In der That bedingt die Bewegung der Electricitätsmengen E eine Strömung von solcher Grösse.

Aus II ergibt sich:

$$Q = Elm \left\{ \cos (mr - nt) - \frac{\sin (mr - nt)}{mr} \right\} \sin^2 \theta.$$

und hieraus folgen durch Differentiation die Kräfte Z, R, P . Im allgemeinen fallen nun allerdings die Formeln zu verwickelt aus, als dass es möglich wäre, aus denselben unmittelbar einen Ueberblick über die Vertheilung der Kräfte zu gewinnen. Für einige Specialfälle sind indess die Resultate verhältnissmässig einfach; wir heben dieselben hervor:

1) Die unmittelbare Nachbarschaft der Schwingung haben wir bereits behandelt.

2) In der z -Axe, also in Richtung der Schwingung, haben wir $d\varphi = rd\theta$, $dz = dr$, $\theta = 0$, also wird hier:

$$\begin{aligned} R &= 0, & P &= 0, \\ Z &= 2Elm/r^2 \left\{ \cos (mr - nt) - \frac{\sin (mr - nt)}{mr} \right\}. \end{aligned}$$

Die electricische Kraft fällt stets in die Richtung der Schwingung, sie nimmt in kleinen Entfernungen ab wie die dritte

Potenz, in grösseren Entfernungen wie das Quadrat des umgekehrten Abstandes.

3) In der xy -Ebene, also für $z=0$, haben wir $dz = -r d\theta$, $d\varphi = dr$, $\theta = 90^\circ$, also wird:

$$P = \frac{A Elm n}{r} \left\{ \sin(mr - nt) + \frac{\cos(mr - nt)}{mr} \right\},$$

$$R = 0,$$

$$Z = \frac{Elm^2}{r} \left\{ -\sin(mr - nt) - \frac{\cos(mr - nt)}{mr} + \frac{\sin(mr - nt)}{m^2 r^2} \right\}.$$

Die electricische Kraft ist in der durch die Schwingung gelegten Aequatorialebene parallel der Schwingung, ihre Amplitude ist gleich $El/r^3 \sqrt{1 - m^2 r^2 + m^4 r^4}$. Die Kraft nimmt bei Entfernung von der Schwingung beständig ab, anfangs schnell wie die dritte Potenz des reciproken Abstandes, später nur sehr langsam, nämlich umgekehrt proportional dem Abstand selbst. In grösseren Entfernungen wird die Wirkung der Schwingung nur in der Aequatorialebene, nicht in der Axe derselben bemerkbar sein.

4) In sehr grossen Entfernungen können wir höhere Potentiale von $1/r$ gegen niedrige vernachlässigen. Wir haben daher in solchen Entfernungen:

$$Q = Elm \cos(mr - nt) \sin^2 \theta,$$

woraus man ableitet:

$$P = A \cdot Elm n \sin(mr - nt) \sin \theta / r,$$

$$Z = - Elm^2 \sin(mr - nt) \sin^2 \theta / r,$$

$$R = Elm^2 \sin(mr - nt) \sin \theta \cos \theta / r.$$

Daraus folgt: $Z \cos \theta + R \sin \theta = 0$. Die Richtung der Kraft steht also in grossen Entfernungen überall senkrecht auf der Richtung vom Ausgangspunkte der Kraft, die Ausbreitung erfolgt hier als reine Transversalwelle. Die Grösse der Kraft ist gleich $Elm^2 \sin(mr - nt) \sin \theta / r$, dieselbe nimmt bei constanter Entfernung vom Nullpunkte gegen die Axe hin ab, wie der Abstand von der letzteren.

Um nun auch für die übrigen Theile des Raumes die Vertheilung der Kraft zu erkennen, bedienen wir uns der graphischen Darstellung, indem wir für bestimmte Zeiten die Linien der electricischen Kraft, nämlich die Curven $Q = \text{constans}$

für gleichabstehende Werthe von Q ziehen. Da Q sich darstellt als das Product zweier Factoren, von denen der eine nur von r , der andere nur von θ abhängt, bietet die Construction dieser Curven keine grossen Schwierigkeiten. Wir zerlegen jeden Werth von Q , für welchen wir die Curve zeichnen wollen, auf verschiedene Weisen in zwei Factoren, bestimmen den Winkel θ , für welchen $\sin^2\theta$ gleich dem einen Factor wird, und mittelst einer Hülfscurve denjenigen Werth von r , für welchen die in Q enthaltene Function von r dem anderen Factor gleich wird, wir finden so beliebig viele Punkte der Curve. Versucht man, die Construction auszuführen, so nimmt man noch manche kleine Vortheile wahr, deren Aufführung hier zu weitläufig sein würde. Begnügen wir uns, in den Figuren 1, 2, 3, 4 das Resultat einer solchen Construction zu betrachten. Diese Figuren stellen die Kraftvertheilung dar zu den Zeiten $t = 0, \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T$, aber bei passender Umkehr der Pfeile auch für alle weiteren Zeiten, welche ganzzahlige Vielfache von $\frac{1}{4}T$ sind. Im Nullpunkt ist in richtiger Lage und ungefähr richtigem Grössenverhältniss die Vorrichtung angedeutet, durch welche in unseren früheren Versuchen die Schwingungen erregt wurden. Die Kraftlinien sind allerdings nicht völlig bis zu diesem Bilde fortgeführt, da ja unsere Formeln die Schwingung als unendlich kurz annehmen, daher in der Nachbarschaft der endlichen Schwingung unzulänglich werden.

Beginnen wir eine Erläuterung der Figuren mit Fig. 1. Hier ist $t = 0$, die Strömung ist im Zustande ihrer stärksten Entwicklung, aber die Pole der geradlinigen Schwingung sind nicht electricisch geladen, es führen keine Kraftlinien auf dieselben zu. Solche Kraftlinien beginnen nun aber von der Zeit $t = 0$ an aus den Polen hervorzuschliessen, sie sind eingeschlossen in eine Kugel, welche einem Werth $Q = 0$ entspricht. In Fig. 1 ist diese Kugel allerdings noch verschwindend klein, aber sie vergrössert sich schnell und erfüllt zur Zeit $t = \frac{1}{4}T$ (Fig. 2) schon den Raum R_1 . Die Vertheilung der Kraftlinien im Innern der Kugel ist nahezu der Art, wie sie einer ruhenden electricischen Ladung der Pole entspricht. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Kugeloberfläche $Q = 0$ vom Nullpunkt entfernt, ist zunächst weit grösser als $1/A$, in der That

würde der letzteren Geschwindigkeit während der Zeit $\frac{1}{2}T$ nur der in der Figur angegebene Werth von $\frac{1}{2}v$ entsprechen. In verschwindendem Abstand vom Nullpunkt ist die Geschwindigkeit der Ausbreitung sogar unendlich. Diese Erscheinung ist es, welche wir in der alten Ausdrucksweise durch die Aussage darstellten, dass sich der mit der Geschwindigkeit $1/A$ fortschreitenden Inductionswirkung eine mit unendlicher Geschwindigkeit fortschreitende electrostatische Kraft superponire. Richtiger deuten wir wohl im Sinne unserer Theorie die Erscheinung, indem wir bemerken, dass im Grunde die sich bildende Welle nicht lediglich den Vorgängen im Nullpunkt ihre Entstehung verdankt, sondern aus den Zuständen des ganzen umgebenden Raumes hervorgeht, welcher letzterer nach unserer Theorie der eigentliche Sitz der Energie ist. Wie dem auch sei, die Fläche $Q=0$ breitet sich weiter mit einer Geschwindigkeit aus, welche mehr und mehr auf $1/A$ herabsinkt, und erfüllt zur Zeit $t = \frac{1}{2}T$ (Fig. 3) den Raum R_1 . Nunmehr ist die electrostatische Ladung der Pole in ihrer grössten Entwicklung, die Zahl der Kraftlinien, welche auf die Pole zuführen, erreicht ihren Maximalwerth. Bei weiterem Fortschreiten der Zeit treten keine weiteren Kraftlinien aus den Polen hervor, vielmehr beginnen die vorhandenen sich wieder in den schwingenden Leiter zurückzuziehen, um dort als electrische Kraftlinien zu verschwinden, ihre Energie aber in magnetische Energie umzuwandeln. Hierbei tritt ein eigenthümliches Verhalten ein, welches aus Figur 4 ($t = \frac{3}{2}T$), wenigstens in seinen Anfängen deutlich zu erkennen ist. Die Kraftlinien nämlich, welche sich am meisten vom Nullpunkt entfernt haben, erhalten bei dem Bestreben, sich zusammenzuziehen, eine seitliche Einbiegung, und indem diese Einbiegung sich mehr und mehr gegen die z -Axe zusammenzieht, schnürt sich von jeder der äusseren Kraftlinien eine in sich geschlossene Kraftlinie ab, welche selbständig in den Raum fortschreitet, während der Rest der Kraftlinien in den schwingenden Leiter zurücksinkt.

Die Zahl der zurückkehrenden Kraftlinien ist also ebenso gross, wie die Zahl der ausgegangenen, ihre Energie aber ist nothwendig um die Energie der abgeschnürten Theile vermindert. Dieser Energieverlust entspricht der Strahlung in den

Raum. Infolge desselben müsste die Schwingung bald zur Ruhe kommen, wenn nicht fremde Kräfte im Nullpunkte die verlorene Energie ersetzen. Indem wir die Schwingung als ungedämpft einführen, haben wir das Vorhandensein solcher Kräfte stillschweigend unterstellt. In Figur 1, zu welcher wir nunmehr zur Zeit $t = T$ zurückkehren, indem wir uns die Pfeile umgekehrt denken, erfüllen die abgeschnürten Theile der Kraftlinien den Kugelraum R_3 , während die von den Polen ausgehenden Kraftlinien vollständig verschwunden sind. Aber neue Kraftlinien brechen aus den Polen hervor und drängen die Kraftlinien, deren Entstehung wir verfolgten, in den Raum R_5 (Fig. 2) zusammen. Es bedarf keiner weiteren Erläuterung, wie nun weiter diese Kraftlinien in den Raum R_6 (Fig. 3), R_7 (Fig. 4), R_8 (Fig. 5) gelangen. Mehr und mehr gehen dieselben in eine reine Transversalwelle über und verlieren sich als solche in der Entfernung. Das beste Bild vom Spiel der Kräfte würde man erhalten, wenn man die Zeichnungen für noch kleinere Zeitabstände herstellte und dieselben auf einer stroboskopischen Scheibe befestigte.

Eine nähere Betrachtung der Figuren ergibt, dass für solche Punkte, welche weder in der z -Axe, noch in der xy -Ebene liegen, die Richtung der Kraft sich von Augenblick zu Augenblick ändert. Stellen wir daher die Kraft für einen Punkt in üblicher Weise durch eine von dem betrachteten Punkt ausgehende Linie dar, so oscillirt der Endpunkt dieser Linie während der Schwingung nicht etwa in einer Geraden hin und her, sondern beschreibt eine Ellipse. Um zu erfahren, ob es Punkte gibt, für welche diese Ellipse nahezu in einen Kreis übergeht, in welchen also die Kraft ohne wesentliche Aenderung ihrer Grösse die Richtungen der Windrose durchläuft, superponiren wir zwei der Zeichnungen, welche Zeiten entsprechen, die um $\frac{1}{2} T$ voneinander entfernt sind, z. B. Figur 1 und 3 oder 2 und 4. Für Punkte, wie wir sie suchen, muss offenbar das Liniensystem der einen senkrecht dasjenige der anderen schneiden, und die Abstände der Linien der einen Figur denen der Linien der anderen gleich werden. Die kleinen Vierecke, welche durch den Schnitt der beiden Systeme entstehen, müssen also für die gesuchten Punkte Quadrate werden. Es lassen sich nun

in der That Gebiete der gesuchten Art bemerken; dieselben sind in Figur 1 und 2 durch kreisförmige Pfeile angedeutet, deren Richtung zugleich die Drehungsrichtung der Kraft angibt. Die punktirten Linien sind zur Erläuterung eingetragen, dieselben gehören den Liniensystemen der Figuren 3 und 4 an. Uebrigens findet man, dass die Kraft das hier geschilderte Verhalten nicht allein in den angegebenen Punkten zeigt, vielmehr in dem ganzen streifenförmigen Gebiet, welches von jenen Punkten ausgehend die Nachbarschaft der z -Axe bildet. Doch nimmt in dieser Richtung die Kraft so schnell an Grösse ab, dass nur in den hervorgehobenen Punkten ihr eigenthümliches Verhalten auffällig werden kann.

Das beschriebene, von der Theorie geforderte Kraftsystem kann nun einer unvollkommenen und noch nicht durch die Theorie geleiteten Beobachtung ganz wohl sich in der Weise darstellen, welche ich in einer früheren Arbeit geschildert habe.¹⁾ Zwar lassen jene Beobachtungen bei weitem nicht alle verwickelten Einzelheiten erkennen, aber sie ergeben das Wesentliche der Vertheilung richtig. Nach Beobachtung wie nach Theorie ist die Vertheilung der Kraft in der Nähe der Schwingung ähnlich der electrostatischen Vertheilung; nach Beobachtung wie nach Theorie breitet sich die Kraft wesentlich in der Aequatorialebene aus und nimmt hier anfangs schnell, dann langsam ab, ohne in einer mittleren Entfernung Null zu werden; nach Beobachtung wie nach Theorie ist die Kraft in der Aequatorialebene, der Axe und in grossen Entfernungen von beständiger Richtung und wechselnder Grösse, während sie in zwischenliegenden Punkten weniger ihre Grösse, als vielmehr ihre Richtung ändert. Nur darin mangelt die Uebereinstimmung zwischen der Theorie und jenen Beobachtungen, dass in grossen Entfernungen nach ersterer die Kraft stets senkrecht auf der Geraden zum Ursprung steht während sie in der letzteren parallel der Schwingung erschien. Für die Nähe der Aequatorialebene, wo die Kräfte am stärksten, kommt dies zwar auf das gleiche hinaus, nicht aber für Richtungen, welche zwischen Aequatorialebene und Axe liegen. Ich glaube, dass

1) H. Hertz, Wied. Ann. 34. p. 155. 1888.

der Fehler auf Seiten der Beobachtung ist. In jenen Versuchen war die Richtung der Schwingung parallel den beiden Hauptwänden des Beobachtungsraumes, dadurch konnte die Componente der Kraft, welche parallel der Schwingung war, verstärkt erscheinen gegenüber der zur Schwingung senkrechten Componenten.

Ich habe deshalb die Versuche wiederholt bei verschiedentlich abgeänderter Aufstellung der primären Schwingung und fand bei gewissen Aufstellungen die Ergebnisse mit der Theorie übereinstimmend. Zu einem eindeutigen Resultate gelangte ich indessen nicht, sondern fand, dass bei grossen Abständen und in Gebieten von geringer Intensität der Kraft die Störungen der Umgebung in dem zur Verfügung stehenden Raum schon zu beträchtlich waren, um ein sicheres Urtheil zu verstatten.

Während die Schwingung arbeitet, schwankt die Energie durch die Kugelflächen, welche den Nullpunkt umgeben, aus und ein. Durch jede Kugelfläche aber tritt während einer Schwingungsdauer mehr Energie aus, als in die Kugelfläche zurücktritt, und zwar für alle Kugelflächen der gleiche Betrag. Dieser Betrag stellt den während der Schwingungsdauer durch Strahlung erlittenen Energieverlust dar. Wir können ihn leicht berechnen für Kugelflächen, deren Radius r schon so gross ist, dass wir die vereinfachten Formeln anwenden dürfen. Es wird nämlich während des Zeitelementes dt durch eine Kugelzone, welche zwischen θ und $\theta + d\theta$ liegt, austreten die Energie:

$$dt. 2\pi r \sin \theta . r d\theta . 1/4 \pi A . (Z \sin \theta - R \cos \theta) P.$$

Setzen wir hierin für Z , P , R die für grosse r gültigen Werthe und integriren nach θ von 0 bis π und nach t von 0 bis T , so ergibt sich, dass durch die ganze Kugel während jeder halben Schwingung austritt die Energie:

$$\frac{1}{2} E^2 l^2 m^3 n T = \pi^4 E^2 l^2 / 3 \lambda^3.$$

Suchen wir hieraus eine angenäherte Schätzung der Verhältnisse zu gewinnen, welche bei unseren wirklichen Versuchen vorlagen. In denselben luden wir zwei Kugeln von 15 cm Radius in entgegengesetztem Sinne zu einer Schlagweite von etwa 1 cm. Schätzen wir die electrostatische Potentialdifferenz zwischen den beiden Kugeln hiernach zu $120 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$, so

war jede Kugel auf das Potential $\pm 60 \text{ gr}^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$ geladen, und es war also $E = 15 \times 60 = 900 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$. Der Gesamtvorrath von Energie, welchen die Schwingung bei ihrem Beginne besass, betrug darnach $2 \times \frac{1}{2} \times 900 \times 60 = 54000 \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-2}$, entsprach daher etwa der Energie, welche ein Grammgewicht nach dem Fall durch 55 cm erreicht hat. Es war weiter die Länge der Schwingung $l = 100 \text{ cm}$ näherungsweise und die Wellenlänge etwa gleich 480 cm. Daraus ergibt sich der Energieverlust in der halben Schwingungsdauer zu etwa $2400 \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-2}$. Es erhellt, dass schon nach elf halben Schwingungen die Hälfte der Energie auf Strahlung verausgabt sein musste. Die schnelle Dämpfung, welche die Erscheinungen an unseren Schwingungen erkennen liessen, war also schon durch die Strahlung nothwendig bedingt und konnte nicht fehlen, selbst wenn der Widerstand der Leiter und des Funkens zu vernachlässigen gewesen wäre.

Eine Energieabgabe von $2400 \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-2}$ in 1,5 Hundert-millionteln Secunde entspricht einer Arbeitsleistung von 22 Pferdekraften. Mindestens in dieser Fülle müsste der primären Schwingung Energie zugeführt werden, wollte man trotz der Strahlung die erregten Schwingungen dauernd mit gleicher Intensität erhalten. Während der ersten wenigen Schwingungen entspricht die Intensität der Strahlung in etwa 12 m Abstand vom primären Leiter der Intensität der Sonnenstrahlung auf der festen Erdoberfläche.

Die Interferenzversuche.

Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrischen Kraft in der Aequatorialebene zu ermitteln, brachten wir die Wirkung derselben zur Interferenz mit der Wirkung einer mit gleichbleibender Geschwindigkeit in einem Drahte fortschreitenden electrischen Welle.¹⁾ Es zeigte sich, dass die auftretenden Interferenzen nicht in gleichem Abstand folgten, sondern sich in der Nähe der Schwingung schneller veränderten, als dies in grösseren Abständen der Fall war. Dies Verhalten wurde durch die Annahme erklärt, dass sich die Gesamtkraft

1) H. Hertz, Wied. Ann. 34. p. 551. 1888.

in zwei Theile zerspalten lasse, von welchen der eine, der electrodynamische, sich mit Lichtgeschwindigkeit, der andere, der electrostatische, sich mit grösserer, vielleicht unendlicher Geschwindigkeit ausbreite. Nach unserer Theorie ist nun aber die in Frage kommende Kraft in der Aequatorialebene:

$$Z = Elm^3 \left\{ -\frac{\sin (mr - nt)}{mr} - \frac{\cos (mr - nt)}{m^2 r^2} + \frac{\sin (mr - nt)}{m^3 r^3} \right\},$$

und dieser Ausdruck zerfällt auf keine Weise in zwei einfache, mit verschiedener Geschwindigkeit fortschreitende Wellen. Ist also die gegenwärtige Theorie richtig, so kann die frühere Erklärung nur eine Annäherung an die Wahrheit darbieten. Wir wollen untersuchen, ob die gegenwärtige Theorie überhaupt zu einer Erklärung der Erscheinungen führt.

Zunächst können wir schreiben $Z = B \sin (nt - \delta_1)$, wo die Amplitude der Kraft $B = El/r^3 \sqrt{1 - m^2 r^2 + m^4 r^4}$ und die Phase δ_1 der Kraft bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin mr/mr + \cos mr/m^2 r^2 - \sin mr/m^3 r^3}{\cos mr/mr - \sin mr/m^2 r^2 - \cos mr/m^3 r^3},$$

welche nach Umformung ergibt:

$$\delta_1 = mr - \arctan \frac{mr}{1 - m^2 r^2}.$$

In Fig. 5 ist durch die Curve δ_1 die Grösse δ_1 als Function von mr anschaulich gemacht. Die Länge ab entspricht dabei in Abscissen und Ordinaten dem Werthe π . Betrachtet man nicht mr , sondern r als variable Abscisse, so entspricht die Länge ab in den Abscissen der halben Wellenlänge.

Um unmittelbar an die Versuche anzuknüpfen, welche wir darzustellen wünschen, ist unter der Zeichnung noch eine weitere Theilung der Abscissenaxe nach Metern angebracht. Es ist nämlich nach den Ergebnissen der directen Messung¹⁾ $\lambda = 4,8$ m gesetzt und danach die Länge des Meters bestimmt; der Anfangspunkt der Theilung ist aber nicht in die Schwingung, sondern in einen Abstand von 0,45 m von derselben verlegt. Die Eintheilung stellt auf diese Weise die Eintheilung der Grundlinien dar, in welcher wir die Interferenzen bestimmten. Man ersieht aus der Figur, dass die Phase überhaupt

1) H. Hertz, Wied. Ann. 34. p. 609. 1888.

nicht vom Ursprung an wächst, vielmehr ist der Verlauf der Phase ein solcher, als entstände die Welle in einem Abstand von etwa $\frac{1}{2}\lambda$ im Raume und liefe von dort theils gegen den Leiter, theils in den Raum hinaus. In grossen Entfernungen ist die Phase um den Werth π kleiner, als sie sein würde, wenn die Welle mit constanter Geschwindigkeit vom Ursprung ausgegangen wäre; die Welle verhält sich also in grossen Entfernungen so, als hätte sie die erste halbe Wellenlänge mit unendlicher Geschwindigkeit durchlaufen.

Die Wirkung w der Drahtwellen auf eine bestimmte Stellung des secundären Leiters kann nun jedenfalls dargestellt werden in der Form: $w = C \sin(\pi t - \delta_2)$, worin als Abkürzung $\delta_2 = m_1 r + \delta = \pi r/\lambda_1 + \delta$ gesetzt ist. λ_1 bezeichnet die halbe Wellenlänge der Drahtwellen, in unseren Versuchen 2,8 m, δ aber die Phase ihrer Wirkung im Punkte $r = 0$, welche wir durch Verschaltung von Drahtlängen willkürlich abänderten. Ebenso konnten wir die Amplitude C abändern und gaben ihr solche Grösse, dass die Wirkung der Drahtwellen der directen Wirkung nahezu gleich war. Die Phase der Interferenz hängt dann nur ab von dem Unterschied der Phasen δ_1 und δ_2 . Bei derjenigen Stellung des secundären Kreises, auf welche sich unser Ausdruck für w bezieht, verstärken sich beide Wirkungen (die Interferenz hat das Zeichen +), wenn $\delta_1 - \delta_2$ gleich Null oder einem ganzen Vielfachen von 2π ist; die Wirkungen vernichten sich (die Interferenz hat das Zeichen -), wenn $\delta_1 - \delta_2$ gleich π oder einem ganzen Vielfachen dieses Werthes ist; eine Interferenz findet nicht statt (die Interferenz hat das Zeichen 0), wenn $\delta_1 - \delta_2$ gleich einem ganzen Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ ist.

Wir wollen uns nun δ so bestimmt denken, dass im Anfangspunkt der Metertheilung die Phase der Interferenz einen bestimmten Werth ε habe, dass daselbst also $\delta_1 = \delta_2 + \varepsilon$ sei. Die gerade Linie 1 unserer Figur soll uns alsdann den Werth von $\delta_2 + \varepsilon$ als Function der Entfernung darstellen. Die Linie ist nämlich mit solcher Neigung gezogen, dass für ein Wachsthum der Abscisse um $\lambda_1 = 2,8$ m die Ordinate um den Werth π wächst, und sie ist so gelegt, dass sie die Curve δ_1 schneidet in einem Punkte, dessen Abscisse die des Anfangspunktes

der Metertheilung ist. Die Linien 2, 3, 4 etc. stellen dann weiter den Verlauf der Werthe von $\delta_2 + \varepsilon - \frac{1}{2}\pi$, $\delta_2 + \varepsilon - \pi$, $\delta_2 + \varepsilon - \frac{3}{2}\pi$ etc. vor. Diese Linien sind nämlich parallel der Linie 1 und so gezogen, dass sie ein und dieselbe Ordinate in Abständen von je $\frac{1}{2}\pi$, ein und dieselbe Abscisse in Abständen von je 1,4 m schneiden. Projicirt man nun die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve δ_1 auf die Abscissenaxe herunter, so erhält man offenbar diejenigen Entfernungen, für welche $\delta_1 = \delta_2 + \varepsilon + \frac{1}{2}\pi$, $\delta_2 + \varepsilon + \pi$, $\delta_2 + \varepsilon + \frac{3}{2}\pi$ etc. wird, für welche also die Phase der Interferenz gegen die des Ausgangspunktes um $\frac{1}{2}\pi$, π , $\frac{3}{2}\pi$ etc. gewachsen ist. Man entnimmt so unmittelbar aus der Figur die Aussagen: Besitzt die Interferenz im Anfangspunkt der Grundlinie das Zeichen + (–), so erlangt sie das Zeichen 0 zum ersten mal bei ca. 1 m, das Zeichen – (+) bei ca. 2,3 m, um wieder das Zeichen 0 zu erreichen bei ca. 4,8 m; die Interferenz kehrt zurück zum Zeichen + (–) bei ca. 7,6 m, sie ist wiederum 0 bei ca. 14 m, um von nun an die Reihe der Zeichen in nahezu gleichen Abständen zu durchlaufen. Besitzt die Interferenz im Nullpunkt der Grundlinie das Zeichen 0, so besitzt sie dies Zeichen ebenfalls bei ca. 2,3 m, 7,6 m, 14 m, sie hat ausgesprochen positiven oder negativen Charakter in ca. 1 m, 4,8 m, 11 m Entfernung vom Nullpunkt. Für mittlere Phasen gelten mittlere Werthe. Man vergleiche mit diesem Ergebniss der Theorie das Ergebniss des Versuches, insbesondere diejenigen Interferenzen, welche stattfanden bei Vorschaltung von 100, 250, 400, 550 cm Draht¹⁾, und man wird die Uebereinstimmung so vollkommen finden, als irgend erwartet werden kann.

Nicht ganz so gut ist es mir gelungen, die Interferenzen der zweiten Art wiederzugeben.²⁾ Zur Herstellung dieser Interferenzen benutzten wir eine Lage des secundären Kreises, bei welcher hauptsächlich die Integralkraft der Induction um den geschlossenen Kreis in Betracht kam. Sehen wir die Dimensionen des letzteren als verschwindend klein an, so ist die Integralkraft proportional der Aenderungsgeschwindigkeit der

1) Hertz, l. c. p. 563.

2) Hertz, l. c. p. 565.

magnetischen Kraft, welche senkrecht auf der Ebene des Kreises steht, also proportional dem Ausdruck:

$$\frac{dP}{dt} = AEIm^2n^2 \left\{ -\frac{\cos(mr - nt)}{mr} + \frac{\sin(mr - nt)}{m^2r^2} \right\}.$$

Hieraus erhält man für die Phase δ_3 dieser Wirkung:

$$\operatorname{tg} \delta_3 = -\frac{\cos mr/mr - \sin mr/m^2r^2}{\sin mr/mr + \cos mr/m^2r^2},$$

oder nach Umformung:

$$\delta_3 = mr - \operatorname{arc} \operatorname{tg} mr.$$

Die Linie δ_3 unserer Figur 5 stellt den Verlauf dieser Function dar. Man ersieht, dass für diese Wirkung die Phase schon vom Ursprung an dauernd wächst. Es müssen daher die Erscheinungen, welche auf eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit hinweisen, bei diesen Interferenzen allerdings schon in der Nähe der Schwingung sich geltend machen. So zeigte es sich auch in den Versuchen, und eben darin bestand der Vortheil, welchen uns diese Art der Interferenz bot. Aber es ergibt sich die scheinbare Geschwindigkeit in der Nähe der Schwingung doch grösser, als in der Ferne, und es ist nicht zu leugnen, dass die Phase der Interferenz sich nach der Theorie wenig, aber bemerkbar schneller ändern müsste, als es in den Versuchen der Fall war. Es erscheint mir wahrscheinlich, dass eine vollkommenere Theorie, welche nicht die beiden wirkenden Leiter als verschwindend klein betrachtet, vielleicht auch eine andere Annahme des Werthes von λ , hier ein bessere Uebereinstimmung herstellen würde.

Von Wichtigkeit ist, dass auch unter Zugrundelegung der Maxwell'schen Theorie die Versuche nicht gedeutet werden können, ohne einen merklichen Unterschied zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen in Drähten und der Wellen im freien Raum anzunehmen.

Wellen in drahtförmigen Leitern.

$$\text{Die Function: } K(p\rho) = \int_0^\infty e^{-1/2 p \varrho} (e^u + e^{-u}) du,$$

welche sich für grosse Werthe von ρ der Function $\sqrt{\pi/2p\rho} \cdot e^{-p\rho}$, für verschwindende Werthe von ρ der Function $-\log(p\rho/2) - 0,577$ anschmiegt, genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 K(pq)}{dq^2} + \frac{1}{q} \frac{dK(pq)}{dq} - p^2 K(pq) = 0.$$

Setzen wir also:

$$H = 2J/An \cdot \sin(mz - nt) \cdot K(pq),$$

so genügt H der Gleichung $A^2 d^2 H/dt^2 = \Delta H$, sobald wir machen $p^2 = m^2 - A^2 n^2$. Dabei soll verstanden sein unter J eine in magnetischem Maass gemessene Stromstärke, unter p und $m = \pi/\lambda$ reciproke Längen, unter $n = \pi/T$ eine reciproke Zeit. Die Function H genügt ihrer Gleichung im ganzen Raumi, ausser in der z -Axe, in welcher sie unstätig wird. Es entsprechen also die aus obigem H abzuleitenden Werthe von R , Z , P , N einer electricischen Bewegung, welche in einem sehr dünnen, längs der z -Axe ausgespannten Drahte stattfindet. In unmittelbarer Nachbarschaft dieses Drahtes wird bis auf Grössen, welche gerade Potenzen von q enthalten:

$$\begin{aligned} Q_0 &= -2J/An \cdot \sin(mz - nt), & \text{also:} \\ R_0 &= 2Jm/Anq \cdot \cos(mz - nt), \\ P_0 &= 2J/q \cdot \cos(mz - nt), \end{aligned}$$

wobei durch den Index o der Bezug auf verschwindende q festgehalten ist. Aus dem Werthe von R_0 folgt, dass die auf der Längeneinheit des Drahtes sich befindende freie Electricität e ist:

$$e = 1/4\pi \cdot 2\pi q \cdot R_0 = Jm/An \cdot \cos(mz - nt).$$

Aehnlich folgt aus P_0 die Stromstärke i :

$$i = 1/4\pi \cdot 2\pi q \cdot P_0 = J \cos(mz - nt).$$

Die Werthe von i und e genügen von selber der nothwendig zu erfüllenden Gleichung $Ade/dt = -di/dz$. Dieselben zeigen uns, dass die behandelte Bewegung eine electricische Sinuswelle darstellt, welche sich in der z -Axe in Richtung der wachsenden z fortpflanzt, deren halbe Wellenlänge λ , und deren halbe Schwingungsperiode T , deren Geschwindigkeit also $\lambda/T = n/m$ ist, und welche eine solche Intensität besitzt, dass die grössten auftretenden Stromstärken $\pm J$ betragen.

Behalten wir uns vor, über fremde Kräfte im Drahte willkürlich zu verfügen, so können wir λ und T als unabhängig voneinander ansehen. Für jedes bestimmte Verhältniss dieser

Größen, also für jede bestimmte Geschwindigkeit der Welle haben die Linien der electrischen Kraft eine bestimmte Gestalt, welche, unabhängig von der Zeit, am Drahte entlang gleitet. Wie früher stellen wir diese Gestalt dar, indem wir die Linien $Q = \text{constans}$ ziehen.

In Figur 6 ist eine solche Darstellung ausgeführt, und zwar zunächst in Figur 6a für den Fall, dass die Geschwindigkeit sehr klein, p also gleich m ist. Die Zeichnung entspricht dann einer electrostatischen Kraftvertheilung, nämlich derjenigen, welche wir erhalten, wenn wir auf dem Draht Electricität so vertheilen, dass die Dichtigkeit eine Sinusfunction der Drahtlänge ist. Figur 6_b gibt die Kraftlinien für eine Geschwindigkeit, welche etwa $28/48$ der Lichtgeschwindigkeit beträgt. Man sieht, dass die Kraftlinien einen grösseren Umweg als vorher machen, um, von dem Drahte ausgehend, zu demselben zurückzugelangen. In der älteren Anschauungsweise ist dies erläutert durch die Aussage: Die electrodynamische Kraft, welche parallel dem Drahte gerichtet sei, schwäche die gleichgerichtete Componente der electrostatischen Kraft, während sie die zum Drahte senkrechte Componente nicht beeinflusse. Die Schwächung der dem Draht parallelen Componente kann bis zur Vernichtung derselben sich steigern. Nehmen wir nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen gleich der Lichtgeschwindigkeit, so wird $p = 0$, es artet dann für jeden Werth von $\varrho K(p\varrho)$ aus in $-\log \varrho + \text{constans}$, und es wird für jeden Werth von ϱ :

$$\begin{aligned} Q &= -2J/An \cdot \sin(mz - nt), & \text{also:} \\ R &= 2Jm/An\varrho \cdot \cos(mz - nt), & Z = 0, \\ P &= 2J/\varrho \cos(mz - nt), & N = 0. \end{aligned}$$

Die Kraftvertheilung ist alsdann die denkbar einfachste, die electrische Kraft steht überall senkrecht auf dem Drahte und nimmt ab im umgekehrten Verhältniss der Entfernung von diesem. Die für gleichabstehende Werthe von Q gezogenen Linien $Q = \text{constans}$ sind in Figur 6_c angedeutet. Für Wellen, welche sich mit einer grösseren Geschwindigkeit als $1/A$ fortpflanzen, wird p imaginär. Für diesen Fall müssen wir unsere Formeln umgestalten, doch gehen wir nicht auf denselben ein, da ihm keine praktische Bedeutung zukommt.

An der Oberfläche eines Leiters setzt sich diejenige Componente der electricischen Kraft, welche tangential zur Oberfläche liegt, stetig in das Innere des Leiters fort. Unter einem vollkommenen Leiter versteht man nach Maxwell einen solchen, in dessen Inneren stets nur verschwindend kleine Kräfte auftreten können. Daraus folgt für die Oberfläche eines vollkommenen Leiters als Bedingung, dass die zur Oberfläche tangentielle Componente der Kraft verschwinden muss. Enthält diese Behauptung keinen Irrthum, so folgt, dass sich in gut leitenden Drähten electricische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit und in derjenigen Gestalt ausbreiten müssen, welche durch Fig. 6_c gegeben ist. Denn nur für diese Kraftvertheilung steht die Kraft überall senkrecht auf der Oberfläche des Drahtes. In der That ist denn auch stets aus der Maxwell'schen Theorie, wie aus den älteren Theorien, der Schluss gezogen worden, dass sich durch vollkommen leitende Drähte electricische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Dürfen wir indessen unseren Versuchen nur ein wenig trauen, so ist dies Resultat unrichtig, die Ausbreitung geschieht mit einer viel geringeren Geschwindigkeit und etwa in derjenigen Gestalt, welche Fig. 6_b anzeigt. Dies Ergebniss ist um so auffallender, als die Geschwindigkeit in Drähten ebenfalls eine von der Natur des Drahtes gänzlich unabhängige Geschwindigkeit zu sein scheint. Ich habe dieselbe als gleich gefunden in Drähten der verschiedensten Metalle, der verschiedensten Dicke, der verschiedensten Gestalt des Querschnittes, auch in Säulen leitender Flüssigkeit. Die Ursachen, welche diese Geschwindigkeit bestimmen, sind noch dunkel. Der Widerstand spielt jedenfalls keine Rolle. Ich vermuthete eine Zeit lang, dass sich ein Einfluss der Constanten k geltend mache, durch deren Einführung Hr. H. v. Helmholtz die Maxwell'sche Theorie erweitert hat.¹⁾ Eine nähere Ueberlegung lässt diese Vermuthung indessen zurückweisen. Wäre die Grenzbedingung nur richtig, so wäre eine Welle von der Form der Fig. 6_c immer noch möglich. Dieselbe würde stets eine reine Transversalwelle sein und müsste sich als solche

1) H. v. Helmholtz, Ges. Abh. 1. p. 545.

mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen, wie ebene Transversalwellen im Raume, ob nun gleichzeitig Longitudinalwellen möglich sind oder nicht. Ein endlicher Werth der Constanten k würde, ohne die Verschiedenheit der beobachteten Geschwindigkeiten zu erklären, fordern, dass zweierlei Arten von Wellen verschiedener Geschwindigkeit im Draht möglich seien, wofür bisher Andeutungen aus der Erfahrung noch nicht vorliegen. Es dürfte die Richtigkeit der Grenzbedingung für schnell veränderliche Kräfte zu bezweifeln sein.

Erscheint es einerseits nicht möglich, den in der z -Axe fortschreitenden Wellen eine beliebig grosse Geschwindigkeit zu ertheilen, so hat es auf der anderen Seite keine Schwierigkeit, die Geschwindigkeit von ihrem Maximalwerth beliebig herabzudrücken und Kraftvertheilungen herzustellen, welche zwischen den Formen 6_a und 6_b eingeschlossen sind. Man lässt zu dem Ende die Welle durch regelmässig gezackte oder spiralförmig aufgerollte Drähte fortschreiten. Indem ich z. B. einen Draht von 40 m Länge zu einer einfachen Spirale von 1 cm Durchmesser in solcher Dichte aufrollte, dass die Länge der Spirale 1,6 m wurde, konnte ich Knotenpunkte in Abständen von ca. 0,31 m beobachten, während im gestreckten Draht die Abstände der Knoten 2,8 m betrugen. Bei allmählichem Ausrecken der Spirale ging der eine Werth auf den anderen über. In der Richtung der z -Axe (der Axe der Spirale) gemessen, bewegt sich also die Welle wesentlich langsamer in dem aufgerollten Drahte. In der Drahtlänge gemessen allerdings bewegt sie sich schneller. Aehnlich ist das Verhalten in gezackten Drähten. Irre ich nicht, so vermag auch hiervon die Maxwell'sche Theorie unter Annahme jener Grenzbedingung für gute Leiter keine Rechenschaft zu geben. Es müsste nach dieser Theorie, wie mir scheint, die in der z -Axe gemessene Ausbreitung durch jede Form des Leiters mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen, sobald nur erstens der Widerstand des Leiters nicht in Betracht kommt und zweitens die Dimensionen des Leiters senkrecht zur Axe verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind. Beide Bedingungen aber sind in spiraligen Metalldrähten erfüllt, ohne dass die Folgerung zuträfe.

Indem wir versuchten, die Beobachtungen aus der Max-

well'schen Theorie zu erklären, ist es uns nicht gelungen, alle Schwierigkeiten zu beseitigen. Gleichwohl wird man die Vollständigkeit, mit welcher jene Theorie den grössten Theil der Erscheinungen wiedergibt, als eine nicht verächtliche Leistung derselben betrachten dürfen. Denn wenn man versucht, auf die Erscheinungen eine der älteren Theorien anzuwenden, so geräth man schon in den elementarsten Zügen auf Widersprüche, es sei denn, dass man durch Einführung des Aethers als Dielectricum jene Theorien mit der Maxwell'schen versöhnt auf dem durch v. Helmholtz angegebenen Wege.

Karlsruhe, im November 1888.

II. *Eine Bestimmung des Ohm; von E. Dorn.*

(Im Auszuge der Königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegt am 5. Juli 1888.)

(Hierzu Taf. I Fig. 7–13.)

Inhaltsangabe: 1. Vorbemerkungen. — 2. Ableitung der Formeln. — 3. Ort der Beobachtungen. — *Beschreibung der Apparate:* 4. Herstellung unmagnetischen Kupfers. — 5. Hauptgalvanometer. — 6. Stativ dazu. — 7. Tangentenbusssole. — 8. Differentialgalvanometer und aperiodisches Galvanometer. — 9. Localvariometer. — 10. Widerstände. — 11. Uhr, Maasse und Gewichte, Scalen, Thermometer. — *Vorbereitende Messungen und Hilfsbeobachtungen:* 12. Calibrirung der Widerstände; Temperaturcoefficienten. — 13. Widerstände in m/qmm Hg. 0°. 14. Constanten des Galvanometers: Temperaturcoefficient des Widerstandes, Selbstinduction, Aenderung der Galvanometerfunction, Magnetischer Localeinfluss, Torsionsverhältniss, Temperaturcoefficient und Inductioncoefficienten des Magnets, Trägheitsmoment. — 15. Constanten der Tangentenbusssole: Durchmesser, Polabstand, Torsionsverhältniss, Magnetischer Localeinfluss. — 16. Zur Ermittlung von M/H : Magnetabstände, Hilfsmagnete, Polabstände. — 17. Localvariometer: Temperaturcoefficient, Reductionsfactor, Vergleichung mit der Schwingungsmethode, Verhältniss von H für verschiedene Stellen. — *Anordnung und Aufstellung der Apparate:* — 18. Galvanometer. — 19. Tangentenbusssole. — 20. Variometer. — 21. Leitungen und Verbindungen. — *Die Hauptbeobachtungen:* 22. Allgemeines. — 23. Gegenseitige Beeinflussung der Instrumente. — 24. Scalenabstände. — 25. Magnetabstände. — 26. Verhält-

niss von H für Galvanometer und Tangentenbussole. — 27. Galvanometerwiderstand in m/qmm Hg und Widerstand für die Dämpfungsbeobachtungen. — 29. Galvanometerfunction. — 30. Schwingungsdauer. — 31. M/H am Platze der Tangentenbussole. — 32. M/H am Platze des Galvanometers, Horizontalintensität und Momente. — 33. Schlussrechnung. — 34. Bemerkungen.

1. Nachdem ich der Academie der Wissenschaften zu Berlin eine kurze Uebersicht meiner Untersuchung über den Werth des Ohm in m/qmm Quecksilber vorgelegt habe, will ich hier eine etwas ausführlichere Darstellung folgen lassen.

Mit den ersten Vorbereitungen zu der in Rede stehenden Untersuchung begann ich zu Darmstadt im Juni 1883, die Hauptbeobachtungen wurden ebenda im physikalischen Institut der technischen Hochschule von Mai 1885 bis Januar 1886 ausgeführt. Die sehr langwierige Berechnung habe ich, durch verschiedene Umstände gehemmt, erst vor kurzem in Halle vollenden können.

Die benutzte Methode beruht auf der gewöhnlich als „dritte“ bezeichneten des Hrn. W. Weber¹⁾ mit einer Abänderung, welche ich bereits in meiner ersten Arbeit über absolute Widerstandsmessung²⁾ eingeführt habe.

Es wird die Dämpfung eines einzelnen kräftigen Magnets durch die ihn eng umschliessenden Windungen eines Multiplicators beobachtet und die Galvanometerfunction durch Vergleichung mit einer Tangentenbussole ermittelt.

Diesmal habe ich aber im Anschluss an Hrn. F. Kohlrausch³⁾ und H. Wild⁴⁾ die Formel so umgestaltet, dass statt der Bestimmung des Erdmagnetismus und des Trägheitsmoments nur die Beobachtung der Ablenkung einer Magnetnadel durch den Galvanometermagnet nöthig wird.

2. Ich beginne mit der Ableitung der Formeln und nehme dabei zugleich auf die Aenderungen der Horizontalintensität und der Temperatur Rücksicht.

1) W. Weber. Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1. p. 232. 1852.

2) E. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 773. 1882.

3) F. Kohlrausch, Sitzungsber. der k. bayr. Acad. d. Wiss. zu München. 13. p. 317. 1883.

4) H. Wild, Abh. der Petersburger Acad. 32. p. 4. 1884.

Die Windungsebene des Galvanometers falle mit dem magnetischen Meridian zusammen, und es sei:

φ der Ablenkungswinkel des Magnets,

K das Trägheitsmoment desselben,

M sein magnetisches Moment bei Abwesenheit äusserer Einwirkung,

γ und α das in dem Magnet durch die magnetisirende Kraft 1 inducirte Längs- und Quermoment,

Θ das Torsionsverhältniss,

H_g die Horizontalintensität am Orte des Galvanometers.

G die Galvanometerfunction,

L der Coëfficient der Selbstinduction,

\Re der absolute Widerstand des Galvanometerkreises,

$-c \frac{d\varphi}{dt}$ ein vom Luftwiderstande herrührender Term.

Wird einstweilen von der Veränderlichkeit der Galvanometerfunction G mit der Ablenkung abgesehen und φ^2 gegen 1 vernachlässigt, so gilt, wenn noch der Kürze wegen:

$$(1) \quad \mathfrak{M} = M + (\gamma - \alpha) H_g$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung¹⁾:

$$(2) \quad \begin{cases} K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\mathfrak{M} H_g (1 + \Theta) \varphi - \left(\frac{G^2 \mathfrak{M}^2}{\Re} + c \right) \frac{d\varphi}{dt} \\ \quad + (L + G^2 \alpha) \frac{G^2 \mathfrak{M}^2}{\Re^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \end{cases}$$

deren letzter Term den Einfluss der Selbstinduction darstellt.

Ist nun weiter λ und λ_0 das log. Decr. für den geschlossenen und geöffneten Multiplicator, T_0 die Schwingungsdauer für den letzten Fall, so folgt²⁾:

$$(3) \quad G^2 \mathfrak{M}^2 = \frac{2K\Re}{T_0} \left[\lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right] \left[1 - \frac{L + G^2 \alpha}{\Re} \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} \right].$$

Weiter sei 1 Ohm = 10^{10} mm. sec⁻¹ = σ m/qmm Hg und $\Re = W$ m/qmm Hg, also:

$$(4) \quad \Re = \frac{W \cdot 10^{10}}{\sigma},$$

und es werde zur Abkürzung gesetzt:

1) E. Dorn, Wied. Ann. 35. p. 192. 1885.

2) Vgl. E. Dorn, Wied. Ann. 22. p. 266. 1884.

$$(5) \quad (L + G^2 \alpha) \varpi \cdot 10^{-10} = H^1),$$

$$(6) \quad \Omega = W \left[\lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right] \left[1 - \frac{H}{W T_0} \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} \right],$$

so kann aus (3) gezogen werden:

$$(7) \quad \varpi = \frac{2 \cdot 10^{10} \cdot K \Omega}{T_0 G^2 \lambda^2}.$$

Um die Galvanometerfunction zu bestimmen, werde ein mit Hülfe einer Tangentenbussole gemessener Strom \mathfrak{Z} zwischen dem Galvanometer (Widerstand w_g) und einem Nebenschluss w_n verzweigt. Ist der das Galvanometer durchlaufende Zweigstrom i und die Ablenkung desselben φ , so ist:

$$(8) \quad G = H'_g (1 + \Theta) \frac{\varphi}{i},$$

$$(9) \quad i = \mathfrak{Z} \frac{w_n}{w_g + w_n},$$

$$(10) \quad \mathfrak{Z} = H_T A (1 + \beta \sin^2 \Phi) \operatorname{tg} \Phi,$$

wo in (10) der Index T an H die Beziehung auf den Ort der Tangentenbussole andeutet, während der obere Strich wegen einer etwaigen zeitlichen Aenderung gegen den Zustand während der Dämpfungsbeobachtungen hinzugefügt ist.

Die Bedeutung von A und β ist:

$$(11) \quad A = \frac{R (1 + \vartheta)}{2 \pi r} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{b^2}{R^2} - \frac{3}{16} \frac{l^2}{R^2} \right),$$

$$\beta = \frac{3}{16} \frac{l^2}{R^2},$$

wenn R den Radius der Tangentenbussole, l den Polabstand ihres Magnets, ϑ das Torsionsverhältniss, r die Zahl der Windungen, b die Breite derselben bezeichnet.

Für den statischen Empfindlichkeitscoefficienten $p' = \varphi/i$ ergibt sich wegen (9) und (10):

$$(12) \quad (p' H'_T) = \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \Phi} \frac{w_g + w_n}{w_n} \frac{1}{A (1 + \beta \sin^2 \Phi)},$$

ferner kann (8) geschrieben werden:

$$(13) \quad G = \frac{H'_g}{H'_T} (1 + \Theta) (p' H'_T).$$

1) H ist sonach der Coefficient der Selbstinduction (einschliesslich der Rückwirkung des inducirten Quermomentes) in sec. \times m/qmm Hg.

Wenn nun bei den zeitlichen Aenderungen der Horizontalintensität das Verhältniss H_g'/H_T' constant bleibt — was für die kurzen in Betracht kommenden Zeiträume hinreichend nahe zutrifft —, so folgt aus (13) mit Rücksicht auf die Unveränderlichkeit von G , dass auch $(p'H_T')$ constant bleibt, und die Formeln (12) und (13) auch ohne den Strich geschrieben werden können.

Zur Elimination von K aus (7) dient die Beobachtung der Schwingungsdauer T_0'' bei geöffnetem Multiplikator, für welche die Gleichung gilt:

$$(14) \quad T_0''^2 = \frac{(\pi^2 + \lambda_0^2) K''}{\mathfrak{M}'' H_g'' (1 + \Theta)},$$

worin die Zufügung des Zeichens '' wegen der Aenderungen der Temperatur und Horizontalintensität nöthig war. Endlich wirke der Galvanometermagnet (Polabstand $2a_1$) in der ersten Hauptlage nach Gauss auf das an seinem Platze belassene Magnetometer der Tangentenbussole¹⁾ (Polabstand $2a$) aus der Entfernung r und erzeuge die Ablenkung ψ , so ist:

$$(15) \quad \frac{M'''}{H_T'''} = \frac{1}{2} \frac{r^3(1 + \vartheta) \operatorname{tg} \psi}{\left(1 + \frac{p_2}{r^2} + \frac{p_4}{r^4}\right)},$$

wo der Kürze wegen:

$$(16) \quad \begin{cases} p_2 = 2a_1^2 - 3a^2(1 - 5\sin^2\psi), \\ p_4 = 3a_1^4 - 15a^2a_1^2(1 - 5\sin^2\psi) \\ \quad + \frac{15}{8}a^4(1 - 14\sin^2\psi + 21\sin^4\psi). \end{cases}$$

Aus den Formeln (7), (13) (ohne Index geschrieben); (14), (15) folgt:

$$(17) \quad \varpi = \frac{2 \cdot 10^{10}}{\pi^2 + \lambda_0^2} \frac{H_T}{H_g} \frac{\Omega T_0''}{(p'H_T)^2 \left(\frac{M'''}{H_T'''} + \gamma - \alpha \right) (1 + \eta)} \cdot F,$$

wenn:

$$F = \frac{K}{K''} \frac{T_0''}{T_0'''} \frac{\mathfrak{M}'' \mathfrak{M}'''}{\mathfrak{M}^2} \frac{H_g''}{H_g} \frac{H_T}{H_T'}.$$

Wird in F noch gesetzt:

1) Zur Controle wurde eine entsprechende Beobachtung mit einem anderen Hülfsmagnet am Orte des Galvanometers gemacht.

$$\frac{T_0''}{T_0} = \sqrt{\frac{K''}{K} \frac{H_g}{H_g''} \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}''}},$$

so geht diese Grösse über in:

$$F = \frac{K^{1/2}}{K''^{1/2}} \frac{\mathfrak{M}''^{1/2} \mathfrak{M}'''}{\mathfrak{M}^{3/2}} \frac{H_g^{1/2}}{H_g''^{1/2}} \frac{H_T}{H_T'''},$$

oder wenn wieder die zeitlichen Aenderungen von H an den verschiedenen Orten gleich angenommen werden und das Verhältniss der \mathfrak{M} durch das der M ersetzt wird:

$$(18) \quad F = F_1 F_2, \quad F_1 = \frac{K^{1/2}}{K''^{1/2}} \frac{M''^{1/2} M'''}{M^{3/2}}, \quad F_2 = \frac{H''^{1/2} H^{1/2}}{H'''},$$

sodass also F_1 den Correctionsfactor wegen der Aenderungen der Temperatur und F_2 den wegen des Erdmagnetismus bedeutet.

Ist nun t die Temperatur des Magnets und:

$$K = K_0(1 + \alpha t), \quad M = M_0(1 - \mu t),$$

ferner v der Stand, τ die Temperatur des Intensitätsvariometers und die relative Aenderung von H gegen einen Normalwerth H_0 gegeben durch¹⁾:

$$(19) \quad \frac{H - H_0}{H_0} = f(v - v_0) - \mu_1(\tau - \tau_0),$$

so werden die beiden Correctionsfactoren:

$$(20) \quad \begin{cases} F_1 = 1 + \frac{\alpha}{2}(t - t'') + \mu(\frac{3}{2}t - t'' - t'''), \\ F_2 = 1 + f(\frac{1}{2}v'' - \frac{1}{2}v - v''') - \mu_1(\frac{1}{2}\tau'' - \frac{1}{2}\tau - \tau'''). \end{cases}$$

Es ist schliesslich noch anzugeben, in welcher Weise unter Benutzung der grundlegenden Untersuchung des Hrn. K. Schering²⁾ die Abhängigkeit der Galvanometerfunction und des log. Decr. von der Amplitude in Rechnung gezogen wurde.

In den Formeln (3), (6), (7) ist zunächst das log. Decr. auf unendlich kleine Amplituden zu reduciren und für G der entsprechende Werth G_0 zu schreiben.

Das Decrement für unendlich kleine Amplituden in brigischen Logarithmen folgt aus zwei successiven Bogen nach:

1) Vgl. F. Kohlrausch, Wied. Ann. 19. p. 140. 1883.

2) K. Schering, Wied. Ann. 9. p. 287. 1880.

$$(21) \quad A' = \log \text{brigg} \frac{b_1}{b_2} + \Sigma_2' b_1^2,$$

wo Σ_2' eine von dem log. Decr. abhängige Grösse ist.¹⁾

Ferner genügt zu setzen:

$$\frac{q}{i} = p = p_0 (1 - \eta' q^2)^2,$$

sodass (nach Weglassung des Striches) aus (12) sich ergibt:

$$(23) \quad (p_0 H_T) = \frac{q}{\text{tg } \Phi} \frac{w_g + w_n}{w_n} \frac{1}{A (1 + \beta \sin^2 \Phi) (1 - \eta' q^2)},$$

und nach (13):

$$(24) \quad G_0 = \frac{H_g}{H_T} (1 + \Theta) (p_0 H_T).$$

Demnach geht die Formel (17), wenn λ_0^2 gegen π^2 vernachlässigt wird, über in:

$$(25) \quad \bar{\omega} = \frac{2 \cdot 10^{10} H_T}{\pi^2} \frac{\Omega T_0'' F_1 F_2}{H_g (p_0 H_T)^2 \left[\frac{M'''}{H_T'''} + \gamma - \alpha \right] (1 + \Theta)},$$

und es sei daran erinnert, dass Ω aus (6), $(p_0 H_T)$ aus (23), M'''/H_T''' aus (15) zu entnehmen ist, während F_1 und F_2 durch (20) defnirt sind.

H_T und H_g sind diejenigen Werthe der Horizontalintensität, welchen die Magnete innerhalb der Apparate unterworfen sind.

3. Ort der Beobachtungen. Abgesehen von wenigen Hilfsmessungen sind sämmtliche Beobachtungen im nord-östlichen Saale der Technischen Hochschule zu Darmstadt angestellt, dessen drei Fenster nach Nord (mit einer kleinen Abweichung nach Ost) liegen. (Vgl. den Situationsplan Fig. 7.)

Die unmittelbar angrenzenden Zimmer, sowie der darunter liegende Keller gehören ebenfalls zum physikalischen Institute. Vor Beginn der Beobachtungen wurde aus allen diesen Räumen das störende Eisenzeug, insbesondere die eisernen Oefen herausgeschafft.³⁾

1) Ueber die Bedeutung von Σ_2' vgl. Wied. Ann. 17. p. 781. 1882.

2) Wegen η' s. l. c. p. 780.

3) Die Ingangsetzung der etwa 15 m entfernten electrodynamischen Maschine veränderte die Horizontalintensität auf dem östlichen Fenster

Zur sicheren Aufstellung der Apparate dienten fünf auf das Kellergewölbe aufgemauerte Steinplatten (Fig. 7 S_1 — S_5).

Von der Festigkeit derselben habe ich mich wiederholt überzeugt, indem ich auf den Apparaten eine Glasscala anbrachte und mit einem stark vergrößernden Fernrohr betrachtete, während eine andere Person sich auf den Platten und in ihrer Nähe bewegte.

Störungen von aussen waren während der Zeit der entscheidenden Beobachtungen (Abends von 7 Uhr an und Sonntag Nachmittags) äusserst selten und machten sich zudem an den fortlaufend abgelesenen Variationsinstrumenten sofort bemerklich, sodass eine verdächtige Beobachtung gleich wiederholt werden konnte.

4. Bei der Herstellung der Apparate richtete ich mein Augenmerk auf die Vermeidung oder wenigstens möglichst Herabsetzung magnetischer Localeinflüsse.

Wenn man bei der Auswahl des Materials auch nur eine mässige Sorgfalt anwendet, gelingt es leicht, permanenten Magnetismus auszuschliessen, schwieriger ist das für inducirten Magnetismus. Um diesen zu erkennen, genügt es nicht, den zu untersuchenden Körper einer schwachen Magnethadel zu nähern, sondern man muss denselben so dicht wie möglich an einen möglichst kräftigen Magnet heranbringen.

Ich bediente mich bei diesen Untersuchungen eines zu einem Plath'schen Astasirungsapparate gehörigen Magnets mit quadratischem Querschnitt, dessen Feld an der benutzten Stelle (der Längsseite gegenüber nahe dem Ende) nach Messungen von Hrn. Sivert Rasmussen dicht an der Oberfläche und 8 mm von derselben entfernt etwa das 600-, resp. 300-fache der Horizontalintensität betrug.

Der mit einem Spiegel versehene Magnet hing an einem Drahte von der Decke herab und wurde mit dicken Platten von Electrolytkupfer so umstellt, dass seine Bewegung aperiodisch wurde, während die zu prüfenden Gegenstände dem

noch nicht um 0,0₅1 ihres Werthes, also waren von der ruhenden Maschine Störungen nicht zu besorgen.

einen auf einer Seite frei gelassenen Ende bis auf 2 mm und weniger genähert werden konnten. Die Vorrichtung war ausserordentlich bequem und auch hinreichend empfindlich, da ich z. B. durch Electrolytkupfer mehrfach eine Abstossung von 2 Scalenth. und darüber bei etwa 2,5 m Scalenabstand erhielt.¹⁾

Da alle Kupferdrähte, welche ich käuflich mir verschaffen konnte, sich magnetisch erwiesen, war ich genöthigt, *eigene Versuche zur Erzielung eines unmagnetischen Drahtes* zu unternehmen.

Die Herren F. A. Hesse Söhne in Heddernheim und W. G. Otto in Darmstadt, denen ich auch an dieser Stelle meinen Dank ausspreche, stellten mir die nöthigen Hilfsmittel und Arbeitskräfte zur Verfügung, und nach längeren Bemühungen, während deren wohl 300 kg Kupfer durch meine Hände gegangen sein mögen, gelang es mir, unmagnetischen Kupferguss und Draht zu erhalten.

5. Galvanometer. Die für das Galvanometer erforderliche Drahtmasse, etwa 20 kg, wurde von Hrn. Obermaier in Nürnberg mit weisser Seide besponnen, und es zeigte sich der Draht vor dem Aufwickeln wie auch das fertige Instrument schwach diamagnetisch (0,4–2,0 mm Abstossung).

Der aus Mahagoniholz gefertigte Rahmen liess für den Magnet einen Raum von 246 mm Länge und 55,5 mm Höhe frei, die Holzdicke war nahe 10 mm, die entsprechenden Dimensionen aussen waren 266 mm und 76,3 mm, während die Breite des Wicklungsraumes 115 mm betrug.

Hierauf wurden zunächst 18 Lagen von je 50 Windungen (eine Lage besass nur 49) aufgewickelt und darüber noch eine abgesonderte Lage von 48 Windungen, welche später dazu diente, den Magnet in Bewegung zu setzen oder zu beruhigen.

Der Widerstand der inneren 899 Windungen und des Drahtrestes zusammen war 3,908 S.-E., während (auf gleiche

1) Ein noch empfindlicheren, technisch brauchbaren Apparat mit astatischem Doppelmagnet hat nach meinen Angaben Hr. E. Hartmann in Bockenheim für Hrn. W. G. Otto in Darmstadt construiert.

Temperatur reducirt) der Draht vor dem Aufwinden 3,883 S.E. besessen hatte. Ein Isolationsfehler war also jedenfalls nicht vorhanden; der geringe Mehrbetrag von 0,025 S.-E. erklärt sich ungezwungen aus der Dehnung und Härtung des sehr weichen Drahtes beim Wickeln.

Der Isolationswiderstand zwischen Haupt- und Nebendraht war etwa $5 \cdot 10^6$ S.-E.

Die Spiegelfassung, welche mit einer Schraube den Steinheil'schen Planparallelspiegel genau vertical zu stellen erlaubte, und der Magnetträger waren aus Electrolytkupfer gefertigt und magnetisch indifferent.

Die Fusschrauben und Klemmen für die Drahtenden, obwohl aus demselben Material, zeigten, ganz nahe an den Untersuchungsmagnet gebracht, einen geringen Magnetismus (bis 2 mm Anziehung), erwiesen sich aber auf 4—5 cm Entfernung — und so nahe kommen sie an den Galvanometermagnet nicht einmal heran — ganz wirkungslos. Die Zusatzgewichte zur Bestimmung des Trägheitsmomentes bestanden aus diamagnetischem Messing.

Der Magnet¹⁾ (hohl, mit „4“ bezeichnet) war aus mehreren ausgewählt; seine Länge war 209,97 mm, der innere und äussere Durchmesser im Mittel 8,82, resp. 17,65 mm, die Masse 298,53 g.

Zur Aufhängung des Magnets diente ein Draht, welcher von einem an der Decke befestigten Torsionskreise herabhäng.

Das Galvanometer war von einem Glaskasten mit Boden von Mahagoni umgeben, wozu vom Herbst 1885 an noch eine zum Theil doppelte Holzhülle kam. Unter dem Glaskasten stand ein Thermometer innerhalb einer Drahtrolle aus demselben Drahte, wie das Galvanometer, deren Durchmesser mit der Dicke der Galvanometerwindungen übereinstimmte. Uebrigens war diese Rolle magnetisch indifferent und ohne Einfluss auf die Dämpfung bei geöffnetem Multiplicator.

1) Die Magnete 2, 3, 4 waren glashart geliefert, 58 Stunden gekocht. in einer Magnetisirungsspirale durch den Strom einer dynamoelectrischen Maschine magnetisirt und darauf noch 5 Stunden gekocht.

Die von der Bespinnung entblösten Enden des Hauptdrahtes und die Klemmschrauben waren gegen das Holz des Rahmens und Fussbrettes durch Elfenbein isolirt.

6. Das Stativ für das Galvanometer (Fig. 8), dessen sämtliche Holztheile doppelt oder dreifach verleimt waren, trug auf einem cylindrischen, durch Pressschrauben *pp* feststellbaren Stiel von 65 mm Dicke die obere rechteckige Tischplatte (*t*), doch wurde letztere so tief gestellt, dass sie auf den drei kleinen festgeleimten Klötzchen (*k*) ruhte. Das auf den Tisch gestellte Galvanometergehäuse sammt Multiplikator konnte also leicht um eine Verticalaxe gedreht werden.

Der untere feststehende Theil des Stativs war noch mit den seitlichen, durch schräge Stützen versteiften Ansätzen *aa'* (77 mm hoch, 64 mm breit) versehen, welche einschliesslich des runden Stückes *m* eine Länge von 3 m hatten.

Auf *m* war (zwischen den Klötzchen *k* durchgehend und dünner als diese) eine viereckige Glasplatte mit einem Loche in der Mitte festgekittet, auf den Ansätzen lagen Spiegelglasstreifen, mit der mittleren Glasplatte durch übergeleimte Glasstücke verbunden und gegen seitliche Verschiebung durch Stifte von Kupfer geschützt.

In dieser Weise war eine zusammenhängende Glasbelegung hergestellt, welche, in der Mitte befestigt, sich nach beiden Seiten bei Temperaturänderungen frei ausdehnen konnte.

Auf die Glasstreifen wurden die Lager für den Magnet zum Zweck der Ablenkungsbeobachtungen aufgekittet. Dieselben bestanden aus einem Brettchen mit eingehobelter dreieckiger Rinne und einer quer über dieselbe festgeleimten Glasplatte, an welche der in der Rinne ruhende Magnet von beiden Seiten her angeschoben wurde. Diese metallfreien Magnetlager schlossen jeden Verdacht einer Störung durch inducirten Magnetismus aus. Die Höhe der Brettchen war so bemessen, dass der ablenkende Magnet mit dem jedesmaligen Hülfsmagnet genau in einer Horizontalen lag.

7. Tangentenbussole. — Die Tangentenbussole hatte 5 Windungen eines blanken Kupferdrahtes von etwa 1 mm

Durchmesser, der auf eine sorgfältig abgedrehte Scheibe von weissem Marmor (Durchmesser rund 497 mm) aufgewickelt war. Die einzelnen Windungen waren durch einen mit aufgewickelten, etwas dünneren Kupferdraht mit Bessinnung aus weisser Seide voneinander isolirt. Die Enden des eigentlichen Drahtes waren durch Löcher im Marmor in einer Weise hindurchgeführt, welche wohl ohne weitere Erläuterung aus Fig. 9 deutlich ist, darin mit Guttapercha fixirt und schliesslich nach Umwindung mit weissem Seidenband lose umeinander geschlungen.

Die dem Prüfungsmagnet in verschiedenen Lagen gegenübergestellte Marmorplatte stiess denselben ein wenig ab (etwa 0,5 mm), war also schwach diamagnetisch.

Eine besondere Erörterung verlangt die Frage, ob nicht etwa ein merklicher Theil des Stromes von einer Windung zur anderen durch den Marmor einen Weg findet.

Auf die horizontal gelegte Marmorscheibe wurden zwei mehrfach gefaltete Stanniolstreifen von 10 cm Länge in 2 mm Abstand fest aufgepresst. Unter Anwendung von 4 Chromsäureelementen wurde eine Ablenkung von 4,4 Scalentheilen bei einem Galvanometer beobachtet, welches für dieselben Elemente und einen Widerstand von etwa 10^8 S.-E. einen Scalentheil Ausschlag ergeben haben würde, also betrug der Widerstand des Marmors mehr als 20 Millionen S.-E. Zwei Windungen des Kupferdrahtes stehen sich nun auf eine Länge von etwa 150 cm in weniger als 2 mm gegenüber, doch beträgt mit Rücksicht auf den schlechteren Contact der Marmorwiderstand zwischen ihnen sicher mehr als 1 Million S.-E. gegenüber etwa $\frac{1}{25}$ S.-E. einer Drahtwindung, sodass die Isolation vollkommen ausreichend ist. Zu dem gleichen Ergebniss führte ein anderer Versuch, bei welchem die Leitung durch den Marmor zwischen den Windungen der Tangentenbussole und einer auf dem Rande der Scheibe angebrachten Drahtwindung sich ganz unmerklich ergab.

Auch zwischen den beiden Drähten auf der Marmorscheibe bestand eine gute Isolation.

Für die meisten Beobachtungen fand ein Magnetometer Verwendung, welches nach einem Modelle von Hrn. F. Kohl-

rausch gebaut und, abgesehen von den Fusschrauben aus Electrolytkupfer, ganz metallfrei war.

Der Magnet, ein Stahlstäbchen von 24,1 mm Länge, 5,7 mm Breite und 0,5 mm Dicke, war auf einen runden Planparallelspiegel von 25,2 mm Durchmesser aufgeklebt, welcher zugleich als Töpler'scher Luftflügel¹⁾ diente. Das flache, mit Silbernitrat und Schwefelammonium geschwärzte Gehäuse aus Elfenbein war vorn und hinten mit Planparallelgläsern geschlossen und hatte beiderseits bis nahe an den Spiegel reichende verticale Scheidewände. Dasselbe wurde schwach diamagnetisch gefunden (etwa 1,2 mm Abstossung).

Wäre der Magnet einfach auf den Spiegel geklebt, so wäre das Instrument für Ablenkungsbeobachtungen aus der ersten Hauptlage nach Gauss nicht brauchbar gewesen, da der Magnet den Spiegel verdeckt hätte. Ich änderte daher die Construction in der Weise ab, dass ich *zwischen Magnet und Spiegel einen ganz flachen Keil aus Schellack brachte*.

Das andere Magnetometer hatte die von Hrn. F. Kohlrausch²⁾ angegebene Einrichtung. Der ziemlich dicke Magnet war 21,4 mm lang und trug einen besonderen mit Seidenpapier bespannten Luftflügel. Auf den Gebrauch des dem Instrumente beigegebenen Kupferdämpfers ist verzichtet.

Die Tangentenbussole stand auf einem ähnlichen dreifüssigen Stativ mit seitlichen Fortsätzen und zusammenhängender Glasbelegung, wie das Galvanometer, nur war die Tangentenbussole unmittelbar auf die mittlere, etwas grösser gewählte Platte gesetzt, da ihr geringeres Gewicht dieselbe nicht gefährdete. Die Spiegelglasstreifen trugen Lager für den Galvanometermagnet von ähnlicher Einrichtung wie beim Galvanometerstativ.

Da die zuerst benutzten Magnetlager sich im Sommer nicht genügend constant erwiesen, wurden für die späteren Beobachtungen neue angefertigt.

8. Für viele Widerstandsmessungen, insbesondere für die Vergleichen kleinerer Widerstände nach der Methode des

1) Beruhigungszeit etwa 20 Sec.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 550. 1882.

übergreifenden Nebenschlusses¹⁾ bediente ich mich eines von mir selbst gewickelten Differentialgalvanometers (*DG*) der von Hrn. F. Kohlrausch angegebenen Form, welches 2×3285 Windungen besass. Jede Hälfte hatte bei 20° den Widerstand 664 S.-E. ; bei entgegengesetzter Hintereinanderschaltung zeigte sich eine Differenz im Betrage von etwa $\frac{1}{3440}$ der Wirkung einer Hälfte, bei entgegengesetzter Parallelschaltung war gleich nach dem Wickeln die Differenz fast unmerklich — etwa $\frac{1}{30000}$ — nahm indessen mit der Zeit stetig zu und hatte im December 1885 $\frac{1}{3000}$ erreicht.²⁾

Da die Beruhigungsdauer etwas lang war — 6 bis 7 Secunden —, so erwarb ich später noch ein aperiodisches Galvanometer (*PG*) mit Glockenmagnet und Dämpfer aus Electrolytkupfer, das in längstens 3 Sec. zur Ruhe kam.

Das gewöhnlich für die Widerstandsmessungen benutzte Rollensystem hatte etwa 30000 Windungen von 13800 S.-E. Widerstand.

Uebrigens diente das Galvanometer *PG* gleichzeitig als Variationsinstrument für die Declination.

Für Widerstandsmessungen wurden beide Galvanometer astasirt, *DG* zur drei- bis siebenfachen, *PG* zur doppelten Empfindlichkeit.

9. Die örtlichen und zeitlichen Aenderungen der Horizontalintensität wurden vermittelt eines Localvariometers *V* mit vier Ablenkungsmagneten nach Hrn. F. Kohlrausch³⁾ verfolgt. Das von Hrn. Hartmann in Bockenheim trefflich ausgeführte Instrument hatte einen Dämpfer aus Electrolytkupfer. Ein zweites gleiches Instrument *V'*, welches Hr. Prof. Kittler zur Verfügung zu stellen die Güte hatte, erlaubte, bei Vergleichung der Intensität für verschiedene Orte, die zeitlichen Variationen zu eliminiren.

10. Widerstände. Um bei den Dämpfungsbeobachtungen zum Galvanometer bekannte Widerstände hinzufügenen

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **20**. p. 76. 1883.

2) Gegenwärtig (Juli 1888) etwa $\frac{1}{1400}$.

3) S. F. Kohlrausch, Wied. Ann. **19**. p. 132 ff. 1883.

zu können, habe ich durch Hrn. Mechaniker L. Waibler einen besonderen Widerstandssatz (WQ) von $2 \times 0,5 + 9 \times 1$ S.-E. (in Neusilber bifilar gewickelt) anfertigen lassen, bei dem die Verbindungen nicht durch Stöpsel, sondern durch Quecksilbernäpfe in Kupferblöcken und Kupferbügel hergestellt waren, welche einen sicheren Contact von weit geringerem Widerstande als Stöpsel ergaben. Die Enden der Drahtrollen waren mit den Kupferblöcken so verbunden, dass beim Herausnehmen mehrerer aneinander grenzender Bügel wirklich die Summe derjenigen Widerstände eingeschaltet wurde, welche durch Entfernen der einzelnen Bügel der Reihe nach hinzugefügt worden wären.¹⁾

Verwendung fanden noch zwei Siemens'sche Dosen-einheiten, Nr. 2674 vom Nov. 1884, und eine ältere, Nr. 1195, mit einer besonderen Zuleitungsvorrichtung, bestehend aus zwei Kupferblöcken mit je zwei Quecksilbernäpfen und je zwei Klemmschrauben auf Ebonitunterlage.

Zur Vermittelung der Widerstandsvergleichen mit übergreifendem Nebenschluss dienten zwei Neusilberwiderstände (DI und DII s. Fig. 10) aus der gleichen Drahtsorte wie WQ^2) von etwas mehr als 1 S.-E., und ein entsprechender mit etwas mehr als 0,5 S.-E. Der bifilar aufgerollte Draht befand sich unten in einer zugeschmolzenen Glasröhre von 30 cm Länge und 3,5 cm Durchmesser, seine Enden waren an 4 mm starke Kupferdrähte angelöthet, welche durch den Verschlusskork isolirt hindurchgeführt und mit je drei angelötheten Klemmschrauben aus Kupfer versehen waren. Absteigende Luftströme in der Röhre wurden durch einen oberhalb der Löthstellen des Neusilberdrahtes befindlichen Wappfropf aufgehalten.

Die Temperatur im Innern der Röhre an der Stelle des Neusilberdrahtes zeigte sich bis auf höchstens $0,02^\circ$ übereinstimmend mit der eines umgebenden Wasserbades, auch wenn dieses 10° wärmer als das Zimmer war. Die von

1) Vgl. E. Dorn, Wied. Ann. **22**, p. 566. 1884.

2) Von Siemens & Halske bezogen. Nach Angabe die für Dosen-einheiten verwendete Drahtsorte

Hrn. K. Strecker¹⁾ hervorgehobenen Uebelstände waren also durch obige Anordnung beseitigt.

Als Nebenschlussdraht bei der Bestimmung der Galvanometerfunction benutzte ich, wie früher, einen blanken auf vier Glasstäbe aufgewundenen Neusilberdraht, der, um einer Erwärmung durch den Strom vorzubeugen, in chemisch reines Benzol tauchte. Die kupfernen Zuführungsdrähte, deren Löthstellen ebenfalls in der Flüssigkeit sich befanden, gingen durch den Ebonitdeckel des Gefäßes zu Kupferwürfeln von 2 cm Seite mit je zwei senkrecht zu einander stehenden Bohrungen, in welche schwach conische Kupferstifte eingeschliffen waren. Alle Stifte passten in alle Löcher; Schraubenmuttern auf dem dünnen Ende erlaubten, die Stifte fest einzupressen. Die Klemmschrauben für die Drähte sassen an den dicken Enden der Stifte. Diese Vorrichtung war gleich vortheilhaft für die Stromverzweigung wie für eine sichere Bestimmung des Zuleitungswiderstandes bei Widerstandsvergleichen.

Durch eine Oeffnung im Deckel war ein Thermometer eingeführt, durch eine andere ein zum Boden reichendes Glasrohr, um mittelst eingeblasener trockener Luft das Benzol umzurühren. Der zuerst benutzte Neusilberdraht (Durchmesser 0,5 mm) zeigte eine Zunahme des Widerstandes mit der Zeit, daher ersetzte ich denselben im Dec. 1885 durch einen anderen stärkeren (Durchmesser 0,7 mm), den ich zuvor durch den Strom der electrodynamischen Maschine ausgeglüht und dann noch längere Zeit der Wirkung eines schwächeren Stromes ausgesetzt hatte. Indessen war diese Behandlung nur von vorübergehendem Erfolg, und nach kurzer Zeit begann auch dieser Widerstand zu wachsen.

Endlich standen mir zwei Stöpselrheostaten (WK_1 und WK_2) und ein Universalwiderstand UWP^2) von Siemens & Halske zur Verfügung, wozu zeitweise noch ein Instrument

1) K. Strecker, Abh. der k. bayr. Acad. der Wiss. 15. p. 388. 1885.

2) Dies Instrument lässt eine Verwendung als Wheatstone'sche Brücke zu, wobei man in zwei Zweigen B und C 10, 100, 1000 S.-E. im dritten A dagegen 1 bis 10000 S.-E. einschalten kann. Der gesuchte Widerstand ist $x = AC/B$.

UWE der zweiten Art aus dem electrotechnischen Institute hinzutrat.

UWP, WK₁, WK₂ und WQ wurden zum Schutz gegen Temperaturschwankungen in Pappkasten mit einer Wattenlage von mehreren Centimetern gesetzt und Thermometer mit ihrem Gefässe bis in den die Rollen enthaltenden Raum eingeführt.

11. Die Uhr, welche ein Holzpendel besass, wurde mit einem Chronographen (aus einem Morse'schen Telegraphenapparat hergestellt) versehen, dessen Taster nahe dem Platze des Beobachters sich befand.

Das an der Pendelstange befestigte Platinmesser durchschnitt die Quecksilberkuppe fortwährend, auch wenn der Chronograph nicht gebraucht wurde; die Elemente (zwei Leclanché) wurden aber nur so lange eingeschaltet, als für die Zeitbeobachtungen unumgänglich erforderlich war.

Der Gang der Uhr wurde mit Hilfe einer von Hrn. Prof. Nell construirten Sonnenuhr controlirt, welche den wahren Mittag, von einem hier gleichgültigen constanten Fehler abgesehen, mit einer Genauigkeit von ein bis zwei Secunden zu beobachten erlaubte. Die Extreme des täglichen Ganges während der Benutzung der Uhr waren + 1,8 und - 2,2 Secunden.

Sämmtliche Längenmessungen sind auf ein in meinem Privatbesitz befindliches, von Hrn. Dr. Pernet in Sèvres berichtiges Meter bezogen, die wenigen Wägungen auf zwei ebenfalls in Sèvres berichtigte Quargewichte.

Für die Längenvergleichen wurde ein Comparator benutzt, auf dessen sehr kräftigem Eisenprisma sich zwei Mikroskope verschieben liessen. Entweder wurde ein Substitutionsverfahren angewendet, nachdem die Mikroskope mit Ocularscalenmikrometern und mehr oder weniger starken Objectiven versehen waren, oder auf den zu messenden Gegenstand wurde eine berichtigte Glasscala aufgelegt und die Abstände bis zu den nächsten Strichen mit einem Ocularschraubenmikrometer von Zeiss ausgemessen.

Für die Spiegelablesungen wurden ausschliesslich auf Glas getheilte Scaln von Hartmann in Bockenheim ver-

wendet; die Scala für das Galvanometer war von Centimeter zu Centimeter, die für die Tangentenbussole für jedes zweite Centimeter berichtigt.

Sämmtliche Thermometer sind mehrfach (Dec. 1883, April 1885, Dec. 1885) mit einem Thermometer von Fuess verglichen, welches ich selbst calibriert hatte.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass alle Unterlegscheiben für die Fusschrauben aus Electrolytkupfer bestanden.

Vorbereitende Messungen und Hilfsbeobachtungen.

12. Widerstände. Zunächst wurden UWP , WK_1 , WK_2 unter Berücksichtigung der von mir an anderer Stelle erörterten Verhältnisse¹⁾ calibriert, wobei UWE oder UWP als Wheatstone'sche Brücke diene. Ein Doppelschlüssel mit Quecksilbercontacts schloss beim einfachen Niederdrücken zuerst den Zweig mit dem Element, dann die Leitung zum Galvanometer.

Das angewendete Substitutionsverfahren erhellt wohl am kürzesten aus einem Beispiel.²⁾

Zu vergleichen sei WK_2 100 mit 100'. In UWP : $B = 1000$, $C = 100$, in WK_2 gezogen 100, Galvanometer

| Ruhelage A von UWP 1000 | | | 1001 |
|-----------------------------|----------|-----------|------|
| 1) 500,0 | 2) 498,3 | 3) 509,25 | |
| 5) 500,0 | 4) 498,3 | | |
| 500,0 | 498,3 | 509,25 | |

$$1,7/10,95 = 0,155, \text{ somit } AC/B = 100,0155.$$

Ebenso für 100': 100,0853; und nach Commutiren des Elementes für 100': 100,0862, 100:100,0168. Hieraus im Mittel:

$$100 + \text{Zuleitung} = 100,0162 \text{ S.-E.}$$

$$100' + \text{Zuleitung} = 100,0858 \text{ S.-E.}$$

$$100' = 100 + 0,0696 \text{ S.-E.}$$

Wie man leicht übersieht, gehen die Fehler von UWP in die kleine Differenz nur mit ihrem procentischen Betrage ein.

Ein gegen dieses Verfahren geltend zu machendes Be-

1) Vgl. E. Dorn, Wied. Ann. **22**. p. 558. 1884.

2) Vgl. E. Dorn, Wied. Ann. **17**. p. 797. 1882.

denken muss noch erledigt werden. Bei Untersuchung der kleineren Widerstände muss $C = 10$ gemacht werden, und obwohl nur 1 Daniell benutzt wurde, könnte die Stromwärme den Werth von $C = 10$ wie die zu untersuchenden Widerstände beeinflussen und somit das Resultat fälschen. Zunächst würde sich dieser Einfluss infolge der ganzen Anordnung fast vollständig herausheben, wovon ich mich durch vergleichende Beobachtungen mit 2 und 7 Secunden dauern dem Stromschlusse überzeugt habe. Ferner ist die Widerstandsänderung durch die Stromwärme unter den obwaltenden Verhältnissen sehr gering, wie aus folgender Beobachtung sich ergab. *UWP* wurde als Wheatstone'sche Brücke geschaltet und $B = 1000$, $C = 10$, $A = 1006$ gemacht. Den vierten Seitenzweig bildete ein blanker Neusilberdraht im Benzol von etwas mehr als 10 S.-E. mit einem Stöpselrheostaten im Nebenschluss. Mit Hülfe dieses letzteren wurde der Strom in dem Galvanometer der Brücke für momentanen Schluss zum Verschwinden gebracht; wenn nun bei längerem Stromschluss eine Ablenkung eintrat, so konnte diese lediglich von der Erwärmung von 10 C herrühren. Die entsprechende Widerstandsänderung liess sich leicht aus der Ablenkung (22,5 Scalentheile) berechnen, welche bei Vermehrung von A um 1 S.-E. erfolgte.

Ich erhielt so unter Benutzung von 1 Daniell:

| Stromschluss | Ablenkung | Änderung von 10 C |
|--------------|---------------|-------------------|
| 10" | unmerklich | — |
| 20 | 0,3 Scalenth. | $\frac{1}{75000}$ |
| 40 | 0,5 " | $\frac{1}{48000}$ |
| 60 | 0,5 " | $\frac{1}{43000}$ |

Für ein frisches Chromsäureelement (etwa = 2 Daniell) war in 40" die Widerstandsänderung $\frac{1}{100000}$, wovon in 2 Minuten $\frac{2}{3}$ verschwanden, ferner nachdem der Strom viermal je 5" geschlossen und ebenso lange unterbrochen gewesen war, $\frac{1}{250000}$. Nach dem Joule'schen Gesetz wäre in diesem Falle, welcher etwa der Sachlage bei den Beobachtungen entspricht, für 1 Daniell $\frac{1}{100000}$ zu erwarten.

Schon im Winter 1883/84 erkannte ich die Nothwendig-

keit, die Temperaturcoefficienten der einzelnen Rollen, — wenigstens der für die Beobachtungen wesentlichen — zu bestimmen. Zu dem Ende wurde der zu untersuchende Widerstandssatz in ein anderes Zimmer gebracht, welches mit dem Beobachtungssaal durch eine Leitung von 0,2 S.-E. Widerstand verbunden war, und mit einem zweiten, im Beobachtungsraume befindlichen Widerstandssatz zusammen in den vierten Zweig der Brücke geschaltet. Die Temperatur des Beobachtungsraumes wurde möglichst constant erhalten, während im anderen Zimmer durch Oeffnen der Fenster niedrige Temperaturen, durch Heizen hohe hergestellt wurden¹⁾, und beidemal immer dieselbe Rolle des einen mit der entsprechenden des anderen Satzes verglichen.

Auf die Temperaturen im Inneren der Kasten wurde grosse Sorgfalt verwendet. Wenn das eingeführte Thermometer nahe die gewünschte Temperatur erreicht hatte, erhielt der Kasten ausser der gewöhnlichen Umhüllung (Pappkasten mit Watte) noch eine weitere und wurde mit Schirmen allseitig umstellt. Besonders bewährte es sich, die Apparate in eine mit trockenen Sägespänen gefüllte Kiste zu setzen und oben mehrfach zuzudecken. Mit den Messungen der Widerstände wurde immer erst begonnen, wenn die Temperatur im Inneren mehrere Stunden nur um wenige Zehntelgrade geschwankt hatte. Als Beispiel möge der Gang der Temperatur bei einer Beobachtung von *UWP* angeführt werden:

| | | | | |
|--------|--------------------------|-------------------|---------------------|--------------------------|
| Zeit: | 8 ^h 20' a. m. | 9 ^h 0' | 10 ^h 10' | 12 ^h 7' p. m. |
| Temp.: | 27,14° | 26,87° | 26,57° | 26,40° |

Beobachtungen 12^h 30' — 1^h 37' bei 26,46 bis 26,51.

| | | | |
|--------|-------------------|--------------------|-------------------|
| Zeit: | 4 ^h 0' | 4 ^h 30' | 5 ^h 0' |
| Temp.: | 26,77° | 26,81° | 26,86° |

Beobachtungen 5^h 5' bis 8^h 0' bei 26,93 bis 27,04°.

Ueber meine Bestimmungen des Widerstandes der Stöpsel habe ich schon berichtet; für *UWP* war der Mittelwerth

1) Im letzteren Falle liess sich eine sehr gute Temperaturregulierung mit Hülfe der Gasflammen erreichen.

0,0,15¹⁾ S.-E. (Extreme 0,0,05 — 0,0,27), für WK_1 0,0,9. Den Widerstand eines der Kupferdrähte, welche die Verbindung der Messingklötze mit den Drahtrollen vermitteln, habe ich seitdem genauer zu 0,0,50 S.-E. für WK_1 und UWP übereinstimmend erhalten. Das Verfahren war folgendes. Seien z. B. die Widerstände der Drahtrollen 1, 2, 2' allein bezeichnet mit w_1, w_2, w_2' , die der zugehörigen Stöpsel mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2'$, endlich die der vier in Betracht kommenden Kupferdrähte a, b, c, d , so führt eine Vergleichung (nach der Methode des übergreifenden Nebenschlusses) von 2 und 2' mit einem Hülfs widerstand auf eine Gleichung der Form:

$$w_2 + b + c + \sigma_1 + \sigma_2' = w_2' + c + d + \sigma_1 + \sigma_2 + \varepsilon,$$

während man ähnlich mit 1 + 2 und 1 + 2' erhält:

$$w_1 + w_2 + a + c + \sigma_2' = w_1 + w_2' + a + b + c + d + \sigma_2 + \eta.$$

Durch Vereinigung beider Gleichungen kommt:

$$2b = \varepsilon - \eta,$$

wo ε und η gemessene Grössen sind. In dieser Weise habe ich aus jedem der Kästen zwei Drähte untersucht.

Zu nachstehender Zusammenstellung der Angaben über UWP ist noch zu bemerken, dass die Correctionen ε für 10^o gelten und die Reduction der Neusilberdrahtrolle allein auf Vielfache von $s = \frac{1}{10000}$ aller in A enthaltenen Rollen geben (nach Beobachtungen vom 16. und 17. Dec. 1883). Für eine andere Temperatur t ist der Widerstand einer Drahtrolle vom Nominalwiderstande N zu berechnen nach:

$$w_t = w_{10} + \beta(t - 10), \text{ resp.}$$

$$w_t = w_{10} + (t - 10)[\beta - \gamma(t + 10)].$$

Von den aufgeführten β/N und γ/N sind die für die kleineren Widerstände von 1 bis 500 S.-E. nach Beobachtungen vom 20. und 22. Febr. 1884 bei etwa 4,6 und 23,3^o berechnet, während die anderen auf Beobachtungen vom 1., 5., 8. März 1884 bei etwa 4,0, 10,0, 26,8^o beruhen.

1) E. Dorn, Wied. Ann. 22. p. 565. 1884. Zeile 17 u. 18 v. o. muss es heissen 0,0,15; 0,0,6; 0,0,18.

UWP.

| | ε | β/N | γ/N | $(\beta - 20\gamma)/N$ |
|--------|---------------|-----------|------------|------------------------|
| 1 | -0,00169 | 0,0,384 | — | — |
| 2 | -0,00091 | — | — | — |
| 2' | -0,00139 | — | — | — |
| 5 | -0,00432 | — | — | — |
| 10 | -0,0075 | — | — | — |
| 10' | -0,0069 | — | — | — |
| 20 | +0,0152 | — | — | — |
| 50 | +0,0242 | — | — | — |
| 100 | +0,047 | 0,0,356 | — | — |
| 100' | +0,039 | — | — | — |
| 200 | +0,021 | 0,0,348 | — | — |
| 500 | +0,061 | 0,0,348 | — | — |
| 1000 | -0,07 | 0,0,380 | 0,0,695 | 0,0,366 |
| 1000' | -0,00 | — | — | — |
| 2000 | -0,00 | 0,0,374 | 0,0,693 | 0,0,360 |
| 5000 | -0,11 | 0,0,388 | 0,0,985 | 0,0,368 |
| 100 B | +0,046 | 0,0,352 | — | — |
| 1000 B | -0,13 | 0,0,382 | 0,0,613 | 0,0,370 |
| 10 C | +0,0037 | 0,0,376 | — | — |
| 100 C | +0,050 | 0,0,353 | — | — |
| 1000 C | -0,05 | 0,0,384 | 0,0,908 | 0,0,368 |

1 Stöpsel $\sigma = 0,0,15$; 2 Kupferdrähte $2k = 0,00100$.

Der thatsächlich vorhandene Widerstand setzt sich zusammen aus demjenigen der Drahtrollen, der durchlaufenen Kupferdrähte und der steckenden Stöpsel.

Nach dem ursprünglichen Plane der Berechnung der Hauptbeobachtungen wäre eine Kenntniss der Caliberfehler von UWP für diese nicht erforderlich gewesen, und daher habe ich auch die Feststellung derselben in den Jahren 1885 und 1886 nicht wiederholt. Bei der schliesslich durchgeführten Berechnung stellte sich dies Bedürfniss aber heraus, und ich habe daher am 30/4. und 1/5. 1887 eine Vergleichung der in Betracht kommenden Widerstände in Halle vorgenommen, deren Ergebniss ich mit den älteren Beobachtungen zusammenstelle.

| | ε (Darmstadt) | ε (Halle) | $D - H$ | In Theilen des Ganzen |
|------|------------------------------|--------------------------|---------|--------------------------|
| 10 | -0,0075 | -0,0055 | -0,0020 | -0,00020 |
| 10' | -0,0069 | -0,0073 | +0,0004 | +0,00004 |
| 20 | +0,0152 | +0,0214 | -0,0062 | -0,00031 |
| 50 | +0,0242 | +0,0236 | +0,0006 | +0,00001 |
| 100 | +0,047 | +0,049 | -0,002 | -0,00002 |
| 100' | +0,039 | +0,033 | +0,006 | +0,00006 |
| 200 | +0,021 | +0,010 | +0,011 | +0,00005 |
| 500 | +0,061 | +0,068 | -0,007 | -0,00001 |

Abgesehen von den wenig wesentlichen Widerständen 10 und 20 übersteigen die Differenzen kaum $\frac{1}{20000}$, und dem entsprechend erhielt ich unter drei der Hauptbeobachtungen, welche ich auch nach der neuen Calibrirung berechnete, das Endresultat zweimal um $\frac{1}{20000}$, einmal um $\frac{1}{13000}$ grösser.

Für WK_1 sind die Temperaturcoefficienten aus Beobachtungen am 2/12. und 3/12. 1883 bei $6,4^\circ$ und $16,7^\circ$ bestimmt worden. Die Calibrirung wurde sehr häufig wiederholt; angegeben sind hier die Correctionen auf Vielfache von $s_1 = \frac{1}{10} w_{10}$ bei der Temperatur von 10° . Die Temperatur, bei welcher die Calibrirung ausgeführt wurde, ist beigesetzt. Es gelten dieselben Bezeichnungen wie oben.

WK_1

| | Dec. 1883 | 18. Juni 1885 | 27. Sept. 1885 | 16. Nov. 1885 | 20. Dec. 1885 | 22. Jan. 1886 | 23. Jan. 1886 | β/N |
|-------|--------------|------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------|
| | 10,0° | 19,6° | 15,3° | 8,9° | 8,5° | 8,9° | 9,1° | |
| 10 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 10' | -0,0046 | -0,0054 | -0,0048 | -0,0046 | -0,0046 | -0,0055 | -0,0057 | 0,0389 |
| 20 | +0,0455 | +0,0458 | +0,0425 | +0,0441 | +0,0449 | +0,0441 | +0,0448 | |
| 50 | +0,0805 | +0,0721 | +0,0755 | +0,0779 | +0,0760 | +0,0698 | +0,0699 | |
| 100 | -0,035 | -0,045 | -0,042 | -0,044 | -0,045 | -0,057 | -0,057 | 0,03407 |
| 100' | +0,034 | +0,039 | +0,038 | +0,027 | +0,024 | +0,011 | +0,012 | |
| 200 | -0,048 | -0,066 | -0,061 | -0,065 | -0,066 | -0,088 | -0,087 | |
| 500 | +0,015 | -0,020 | -0,010 | -0,015 | -0,018 | -0,078 | -0,078 | 0,03407 |
| 1000 | +0,09 | +0,02 | +0,06 | +0,06 | +0,06 | -0,07 | -0,07 | 0,03410 |
| 1000' | -0,34 | -0,42 | -0,39 | -0,39 | -0,39 | -0,51 | -0,53 | 0,03432 |
| 2000 | -0,26 | -0,38 | -0,31 | -0,31 | -0,31 | -0,57 | -0,58 | 0,03411 |
| 5000 | +3,14 | +2,90 | +3,20 | +3,35 | +3,34 | +2,66 | +2,65 | 0,03395 |

1 Stöpsel $\sigma = 0,0,9$, 2 Kupferdrähte $2k = 0,00100$.

Da $s_1 = s - 0,042$ (Dec. 1883) gefunden wurde, so sind die zu Grunde liegenden Einheiten in dieser und der vorigen Tabelle fast identisch.

Uebrigens war $s_1 = 0,9939 \text{ m/qmm Hg } 0^\circ$.

Vielfache Ausmessungen einzelner Theile von WK_1 mit Hülfe des als Wheatstone'sche Brücke benutzten UWP bei verschiedenen Temperaturen bestätigten die Zuverlässigkeit der Calibrirung und der Temperaturcoefficienten.

Nebenschlussdrähte. Erster Draht w_n .

Der Temperaturcoefficient wurde vermittelt, indem der Widerstand des in Benzol tauchenden Drahtes für Temperaturen von $4,0$ bis $29,6^\circ$ mit Hülfe von UWP ausgemessen wurde. Die Aenderung des Widerstandes für 1° ergab sich zu $0,00359$ (gemessen in $s_1 = \frac{1}{10} w_{10}$, wo w_{10} der Widerstand der Drahtrolle 10 in WK_1). Da es später bei den Hauptbeobachtungen auf das Verhältniss von w_n zu den Widerständen in WK_1 ankam, wurde w_n mit der Rolle 10 von WK_1 durch Substitution im 4ten Brückenzeige von UWP verglichen. In s_1 ausgedrückt wurde nach Reduction auf die Temperatur 10° erhalten $w_n =$

| | | |
|------------------------|--------------------------|-----------------------|
| 10. Febr. 1884 9,9634, | 3. Aug. 1885 9,9692, | 10. Nov. 1885 9,9727, |
| 27. Mai 1885 9,9659, | 3. Oct. 1885 9,9698, | 16. Nov. 1885 9,9740, |
| 13. Juni 1885 9,9672, | 24. Oct. 1885 9,9691(?), | 19. Nov. 1885 9,9740, |
| 1. Aug. 1885 9,9691, | 2. Nov. 1885 9,9715, | 30. Nov. 1885 9,9757. |

Zweiter Draht w_n' . Aenderung für 1° (aus Temperaturen zwischen $7,3^\circ$ und $22,2^\circ$ abgeleitet) $0,00296$. Widerstand von w_n' für 10° ebenso wie oben bestimmt:

| | | |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 5. Dec. 1885 9,9965, | 30. Dec. 1885 9,9976, | 13. Jan. 1886 10,0000, |
| 8. Dec. 1885 9,9967, | 7. Jan. 1886 9,9989, | 17. Jan. 1886 10,0010, |
| 10. Dec. 1885 9,9966, | 10. Jan. 1886 9,9994, | 21. Jan. 1886 10,0006, |
| 27. Dec. 1885 9,9975, | 11. Jan. 1886 9,9999, | 22. Jan. 1886 10,0008. |

Der für die Hauptbeobachtungen geltende Werth von w_n und w_n' wurde durch Interpolation aus obigen Tabellen gewonnen.

Uebrigens war der auf Quecksilber bezogene spezifische Widerstand des Benzols $> 1,4 \cdot 10^{13}$, und ich habe mich überzeugt, dass der Draht in Benzol und in Luft den gleichen Widerstand zeigte.

13. Widerstände in $m/qmm\ Hg\ (0^{\circ})$. Wie später noch ausführlich auseinandergesetzt werden wird, wurde in letzter Linie der Widerstandssatz WQ benutzt, um bei den Hauptbeobachtungen den Widerstand des Galvanometerkreises in $m/qmm\ Hg$ auszudrücken. Die beiden Doseneinheiten und die Drähte DI und DII vermittelten die Beziehung von WQ auf Quecksilberröhren.

Diese habe ich nicht selbst hergestellt, vielmehr hatte Hr. Prof. F. Kohlrausch die Güte, im April 1884, sowie im September und November 1885 die Doseneinheit Nr. 2674 und den Draht DI (das erste mal auch DII) durch Hrn. Dr. Strecker und Hrn. Dr. Kreichgauer mit den in Würzburg construirten Normalquecksilberröhren vergleichen zu lassen.

Die zur Reduction der Messungen erforderlichen Temperaturcoefficienten mögen zuerst angegeben werden.

Von der Drahtrolle, welcher ich später das Material für WQ , DI und DII entnahm, wurde ein Stück von etwa 5 S.-E. abgeschnitten, bifilar aufgewickelt und, nachdem die Enden an starke Kupferdrähte angelöthet waren, in eine unten zugeschmolzene Glasröhre gesteckt. Indem ich letztere in Eis und Wasser von $15,20^{\circ}$ und $30,07^{\circ}$ einsenkte und den Widerstand mit UWP mass, erhielt ich den Temperaturcoefficienten¹⁾ zwischen 0° und $15,20^{\circ}$ $0,0,378$, zwischen $15,20^{\circ}$ und 30° $0,0,381$, im Mittel $0,0,379$.

Den Temperaturcoefficienten von DI und DII untersuchte ich aber unter Benutzung der Methode des übergreifenden Nebenschlusses²⁾ noch besonders, indem der eine Draht (in der zugehörigen Glasröhre) in einem Wasserbade von ungefähr $30\ l$ blieb, während der andere (aus seiner Röhre herausgenommen) in Benzol tauchte, dessen Temperatur von $5,7^{\circ}$ bis $23,8^{\circ}$, resp. von $8,5^{\circ}$ bis $24,2^{\circ}$ durch mehrere Zwischenstufen erhöht wurde.

So ergab sich der Temperaturcoefficient für DI $0,0,377$, für DII $0,0,380$ in guter Uebereinstimmung mit dem oben

1) Die Grösse ξ der Formel $w_t = w_0 (1 + \xi t)$.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 20. p. 76. 1883.

für das gleiche Material erhaltenen Werthe. Die Zunahme des Widerstandes in $m/qmm\ Hg$ für 1° war bei *DI* $0,0_33748$, bei *DII* $0,0_33809$; übrigens wurden die Beobachtungen hierdurch bis auf $\frac{1}{100\,000}$ dargestellt.

Nunmehr liess sich die entsprechende Messung auch für die Doseneinheiten ausführen. Dieselben wurden (mit übergreifendem Nebenschluss) mit dem im Wasserbade befindlichen *DII* verglichen und die Temperatur des Zimmers durch Heizen gesteigert ($13,6^\circ$ bis $24,8^\circ$). Für 1° wuchs der Widerstand von Nr. 1195 um $0,0_33128$, von Nr. 2674 um $0,0_33822$. Auch hier stimmen die hiermit berechneten Werthe bis auf etwa $\frac{1}{100\,000}$ mit den Beobachtungen.

Bezüglich der Zuverlässigkeit der Methode des übergreifenden Nebenschlusses will ich noch hinzufügen, dass ich sehr häufig das Verhältniss zweier Widerstände direct und dann durch Vergleichung mit einem dritten ermittelte, wobei die Abweichung im Mittel ebenfalls $\frac{1}{100\,000}$ betrug.

Die Art der Contactanlegung an die Doseneinheiten bedarf noch einer kurzen Erörterung. Bekanntlich sind die Enden des Neusilberdrahtes an kräftige, vierkantige Messingstäbe angelöthet, welche an einer Seite Klemmschrauben, an der anderen amalgamirte Kupferstifte tragen. Beim übergreifenden Nebenschluss sind nun zwei Drähte zur Stromzuleitung erforderlich, zwei andere führen zum Galvanometer, und gemessen wird der Widerstand zwischen denjenigen Stellen, an welchen sich die Leitung zum Galvanometer abzweigt. Es sind nun drei wesentlich verschiedene Schaltungen möglich, welche schematisch (Fig. 11 I, II, III) dargestellt sind. Bei I misst man den Widerstand des Drahtes allein, bei II kommen noch die Stücke $bc\ b'c'$, bei III $ab\ a'b'$ hinzu. Ich selbst bediente mich fast ausschliesslich der Schaltung II; da aber Hr. Dr. Strecker und Kreichgauer zum Theil nach I und III gemessen haben, musste der Unterschied festgestellt werden.

Indem ich von den betreffenden Stellen einen Zweigstrom nach einem empfindlichen graduirten Galvanometer ableitete, fand ich (in S.-E.) bei Nr. 2674:

$$\begin{array}{ccccccc} a b = 0,0,086, & b c = 0,0,066, & a c = 0,0,149, & (a b + b c = 0,0,152), \\ a' b' = 0,0,060, & b' c' = 0,0,112, & a' c' = 0,0,171, & (a' b' + b' c' = 0,0,172), \\ \hline & 0,0,146 & 0,0,178 & \end{array}$$

andererseits als Differenz einer Vergleichung mit *DII* für die Anordnungen I und II am 7. Dec 1885: 0,0₃173, am 25. und 26. Jan. 1886: 0,0₃180, mit dem obigen $bc + b'c'$ fast identisch.

Vor und nach der Uebersendung nach Würzburg wurden die betreffenden Stücke mit der alten Doseneinheit Nr. 1195 verglichen, welche in Darmstadt blieb. Um die Uebereinstimmung der Temperaturangaben zu sichern, schickte ich ein in Zehntelgrade getheiltes Thermometer mit, dessen Correctionen ich bestimmt hatte.

Als Ergebniss seiner im April 1884 vorgenommenen Untersuchung theilte Hr. Dr. Strecker Folgendes mit:

1. Doseneinheit Nr. 2674 (für 11,38°)¹⁾ verglichen mit Normaleinheit

Nr. 7: 0,9971 m/qmm Hg (0°),

Nr. 26: 0,9971 " " "

2. Nr. 2674: (11,38°) = *D I*(11,15°) - 0,0020,

Nr. 2674: (11,41°) = *D II*(11,27°) - 0,0100;

3. *DI* und *DII* verglichen mit Quecksilberrohr Nr. 2:

D I(11,13°) = 0,9992 m/qmm Hg (0°),

D II(11,06°) = 1,0072 m/qmm Hg (0°).

Mit Benutzung der mitgetheilten Temperaturcoefficienten entstehen hieraus die Gleichungen für 10°:

1. Nr. 2674: (10°) = 0,99657 m/qmm Hg (0°),

2. Nr. 2674: (10°) = *D I*(10°) - 0,00210,

Nr. 2674: (10°) = *D II*(10°) - 0,01005;

3. *D I*(10°) = 0,99878 m/qmm Hg (0°),

D II(10°) = 1,00680 m/qmm Hg (0°).

Durch Combination von 2. und 3. folgt:

Nr. 2674: (10°) = 0,99668 m/qmm Hg (0°)

Nr. 2674: (10°) = 0,99675 m/qmm Hg (0°)

und im Mittel von 1. und diesen Werthen:

Nr. 2674: (10°) = 0,99667 ± 6 m/qmm Hg (0°).

1) Die Temperaturen sind bereits corrigirt.

Da aber Hr. Strecker nach der Schaltung III mass, so ist zur Reduction auf Schaltung II noch hinzuzufügen 0,032, sodass endlich:

Nr. 2674: (10^0) 0,99670 m/qmm Hg (0^0).

Ferner war von mir beobachtet:

| | |
|----------------|---|
| 23. März 1874: | Nr. 1195 (10^0) = Nr. 2674 (10^0) + 0,001 825 |
| 7. Mai | + 0,001 799 |
| 1. Juni | + 0,001 808 |
| | Mittel + 0,001 809 |
| | ± 11 |

Hieraus geht hervor, dass eine die Grenzen der Beobachtungsfehler überschreitende relative Aenderung der beiden Doseneinheiten nicht erfolgt war, und der Widerstand der Nr. 1195 (10^0): 0,99851 m/qmm Hg (0^0) betrug.

Hingegen waren *DI* und *DII* nicht unverändert geblieben, vielmehr wurde für 10^0 erhalten:

| | <i>DI</i> — Nr. 1195 | <i>DII</i> — Nr. 1195 |
|---------------|----------------------|-----------------------|
| 23. März 1884 | + 0,00001 | + 0,00802 |
| 7. Mai | + 0,00023 | + 0,00824 |
| 1. Juni | + 0,00035 | + 0,00844. |

Im Sept. und Nov. 1885 ist dann Nr. 2674 und *DI* von Hrn. Dr. Kreichgauer sehr sorgfältig mit dem Normal-quecksilberrohr Nr. 2 verglichen worden.

Der Widerstand des letzteren bei der Temperatur *T* des Luftthermometers wurde berechnet nach¹⁾:

$$W_T = \sigma_T C \frac{LD}{M} [L + a(r_1 + r_2)].$$

Hierin bedeutet σ_T den specifischen Widerstand des Quecksilbers für T^0 , *C* eine vom Caliber der Röhre abhängige Constante, *L* die Röhrenlänge, *M* die von ihr gefasste Quecksilbermasse, *D* die Dichtigkeit des Quecksilbers, r_1 und r_2 die Radien der Endquerschnitte (*L*, *M*, *D*, r_1 , r_2 für die Temperatur *T* geltend), $a = 0,80$ die Ausbreitungsconstante.

C bestimmte Hr. Kreichgauer nach den Beobachtungen von Hrn. Strecker vermittelst der Constanten der beiden besten Röhren 3 und 5 zu 1.00716, während eine zweimalige

1) K. Strecker, Wied. Ann. 25. p. 269. 1885.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.

Calibrirung 1,00714 lieferte. Der erstere Werth ist weiter benutzt.

Werden noch die Dimensionen durch die für 12° geltenden Werthe ausgedrückt und $L_{12} = 1,20675$, $D_{12} = 13,5665$ eingeführt, so ergibt sich:

$$W_T = \frac{\sigma_T}{M_{12}} 19,9137 (1 - 0,058 (T - 12)),$$

worin für die erste und dritte der vorgenommenen Rohrfüllungen der Mittelwerth $M_{12} = 20,10575$ g der gemessenen Werthe 20,1058 und 20,1057, für die zweite, wo die Entleerung des Rohres misslang, der Strecker'sche Mittelwerth 20,1053 einzusetzen ist.

Muss bei Vergleichung des Quecksilberrohres mit einem Widerstande y dem ersteren ein Nebenschluss vom Betrage N gegeben werden, so ist:

$$y = \frac{W_T N}{W_T + N} = W_T - \frac{W_T^2}{W_T + N}.$$

Etwas ausführlicher will ich nur die wichtigsten Vergleichen, die von Nr. 2674 im Nov. (3—13), mittheilen.

Nr. 2674.

| Beob. | T Luftth. | W_T | $\frac{1}{W_T + N}$ | t Quecksilberth. | Für t° | Für 10° von Klemmen ab | Für 10° Draht allein |
|-------|----------------|-----------|---------------------|-----------------------|---------------|------------------------------|-------------------------|
| 1 | 12,64 | 1,001 785 | 0,003 930 | 11,89 | 0,997 841 | 0,997 119 | 0,996 973 |
| 2 | 11,56 | 1,000 810 | 3 193 | 11,31 | 0,997 612 | 0,997 111 | 0,996 965 |
| 3 | 11,62 | 1,000 862 | 3 277 | 11,20 | 0,997 580 | 0,997 121 | 0,996 975 |
| 4 | 11,75 | 1,001 011 | 3 097 | 12,18 | 0,997 908 | 0,997 075 | 0,996 929 |
| 5 | 11,79 | 1,001 046 | 3 295 | 11,73 | 0,997 744 | 0,997 083 | 0,996 937 |
| 6 | 11,85 | 1,001 100 | 3 120 | 12,69 | 0,997 974 | — | 0,996 946 |
| 7 | 11,89 | 1,001 136 | 3 269 | 12,43 | 0,997 860 | — | 0,996 931 |
| 8 | 12,03 | 1,001 261 | 3 383 | 12,42 | 0,997 869 | — | 0,996 944 |
| 9 | 11,56 | 1,000 832 | 3 423 | 11,24 | 0,997 404 | — | 0,996 930 |
| 10 | 11,24 | 1,000 533 | 3 117 | 11,18 | 0,997 413 | — | 0,996 962 |
| 11 | 11,25 | 1,000 542 | 3 094 | 11,21 | 0,997 444 | — | 0,996 982 |
| 12 | 11,19 | 1,000 488 | 3 084 | 11,00 | 0,997 401 | — | 0,997 019 |
| 13 | 11,19 | 1,000 488 | 3 107 | 11,03 | 0,997 378 | — | 0,996 984 |

Unter $1/(W_T + N)$ ist der Mittelwerth für die vier Commutatorstellungen¹⁾ angegeben; Beob. 1—3 ist mit Füllung 1

1) Vgl. F. Kohlrausch, Wied. Ann. 20. p. 76. 1883.

— bereits benutztes Quecksilber, — Beob. 4—9 mit Füllung 2, Beob. 10—13 mit Füllung 3 — beidemale frisch destillirtes Quecksilber — angestellt. Bei 1—5 wurde von den Klemmen aus (Schaltung III) 6—13 der Draht allein (Schaltung I).

Der Widerstand des Drahtes allein folgt:

| | | |
|-------------|---------------------|--------------------|
| aus 1—3 | $0,996\,971 \pm 4$ | m/qmm Hg (0^0) |
| 4—9 | $0,996\,936 \pm 6$ | " " " |
| 10—13 | $0,996\,987 \pm 8$ | " " " |
| Hauptmittel | $0,996\,965 \pm 19$ | m/qmm Hg (0^0) |

und nach Anbringung der Reduction auf die von mir benutzte Schaltung II:

$$\text{Nr. 2674 } (10^0) = 0,997\,143 \text{ m/qmm Hg } (0^0).$$

Die beiden am 5. bis 7. September mit schon benutztem Quecksilber ausgeführten Messungen ergeben auf die Schaltung II reducirt:

$$\text{Nr. 2674 } (10^0) = 0,997\,054 \text{ m/qmm Hg } (0^0),$$

also etwa $\frac{1}{10000}$ weniger.

Für $DI(10^0)$ lieferten acht mit den Füllungen 2 und 3 der Normalröhre im November angestellte Beobachtungen im Mittel $1,0_320$ m/qmm Hg (0^0), ferner eine directe Vergleichung am 13. November:

$$DI(11,13^0) = \text{Nr. 2674 } (11,13^0) \times 1,00323,$$

woraus mit Benutzung der Temperaturcoefficienten folgt (Schaltung I):

$$\text{Nr. 2674 } (10^0) = 0,996\,965 \text{ m/qmm Hg } (0^0),$$

zufällig identisch mit dem Mittelwerthe, den die unmittelbare Beziehung auf die Normalquecksilberröhre ergeben hatte.

Jedenfalls geht aus dem Ganzen die grosse Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Messungen von Hrn. Dr. Kreichgauer hervor.

Nun hatte ich beobachtet:

$$\text{Nr. 1195 } (10^0) - \text{Nr. 2674 } (10^0)$$

| | | |
|-------------------|-----------|-----------|
| 6. Juli 1885 | 0,001 52 | |
| 21. November 1885 | 0,001 509 | 0,001 499 |
| 22. November 1885 | 0,001 489 | |

Wird für die Zeit der Würzburger Beobachtungen im November 1885 die Differenz 0,001 500 angenommen, so folgt für diese Zeit:

$$\text{Nr. 1195 } (10^0) = 0,998\,643 \text{ m/qmm Hg } (0^0).$$

Dieser Werth weicht von dem im April 1884 erhaltenen (0,99851) nur um etwa $\frac{1}{8000}$ ab, kaum mehr, als der mögliche Fehler der Strecker'schen Beobachtungen beträgt.

Da nun die Hauptbeobachtungen, welche allein die Kenntniss von Widerständen in m/qmm Hg erfordern, in die Zeit vom 31. Mai 1885 bis 19. Jan. 1886 fallen, so sehe ich die alte Doseneinheit Nr. 1195 als unverändert an und berechne die übrigen Widerstände unter dieser Voraussetzung.¹⁾

Um das Verhalten der anderen Drähte übersichtlich zu zeigen, stelle ich in folgendem Täfelchen für 10^0 die zu verschiedenen Zeiten beobachtete Differenz der beiden Doseneinheiten, sowie die Werthe von *DI* und *DII* in m/qmm Hg

1) Die Doseneinheit Nr. 2674 ist auch im Laboratorium der Herren Siemens und Halske in Berlin untersucht worden. Dieselbe trägt die Aufschrift „Richtig bei $19,5^{\circ}\text{C}$., Februar 1884, $\alpha = 0,0,37^{\circ}$ “. Als Resultat einer am 11. März 1886 vorgenommenen Vergleichung wurde angegeben: „Nach dem der früheren Messung zu Grunde gelegten Werth unserer Normalwiderstände ist jetzt Dose 2674 richtig bei $19,1^{\circ}\text{C}$. $\alpha = 0,0,37^{\circ}$ “. Nach dem jetzigen Werth der Normalen, bei welchem der Ausbreitungswiderstand nach Lord Rayleigh in Rechnung gezogen ist, ist die richtige Temperatur $19,7^{\circ}\text{C}$.“

Berechne ich hieraus unter Benutzung des von mir erhaltenen Temperaturcoefficienten 0,0,382 den Widerstand für 10^0 , so folgt dieser Febr. 1884: 0,99637, März 1886: 0,99652, resp. 0,99629 „Siemens'sche Einheiten“ und weiter durch Vergleichung mit den oben angegebenen Resultaten der Herren Strecker und Kreichgauer:

| | | | | |
|-------------|-----------|-------------------|----------|---------------------|
| Febr. 1884. | 1 „S.-E.“ | = 0,99670/0,99637 | = 1,0,53 | m/qmm Hg (Strecker) |
| März 1886. | 1 „S.-E.“ | = 0,99714/0,99652 | = 1,0,62 | „ „ (Kreichgauer) |
| | resp. | = 0,99714/0,99629 | = 1,0,85 | „ „ „ |

Der erste Werth stimmt sehr nahe mit der Angabe von Hrn. Strecker (Wied. Ann. 25. p. 485. 1885) „1 S.-E. (gegenwärtig im Gebrauch) = 1,0,27 m/qmm Hg 0^0 (Strecker)“; die beiden anderen finden ihre Erklärung in einer Mittheilung von Hrn. Dr. O. Frölich vom 23. Sept. 1886, wonach sich die Normalrolle, mit welcher die Doseneinheiten bestimmt werden, seit 1884 bedeutend geändert hat und etwa $\frac{1}{2000}$ höher ist.

zusammen, indem ich bei letzteren für das Jahr 1884 die Strecker'sche, für 1885/1886 die Kreichgauer'sche Messung zu Grunde lege.

| Datum | Nr. 1195 — 2674 | m/qmm Hg | |
|-------------------|--------------------|-----------|------------|
| | | <i>DI</i> | <i>DII</i> |
| 23. März 1884 | +0,001 825 | 0,99852 | 1,00657 |
| 7. Mai | 0,001 799 | 0,99871 | 1,00675 |
| 8. Mai | — | 0,99873 | 1,00676 |
| 31. Mai | — | 0,99883 | 1,00688 |
| 1. Juni | 0,001 803 | 0,99886 | 1,00694 |
| 3. Juni | 0,001 750 | — | 1,00691 |
| 19. Juni | 0,001 777 | — | 1,00704 |
| 4. Juli 1885 | 0,001 55 | 0,99998 | 1,00811 |
| 6. Juli | 0,001 52 | — | 1,00811 |
| 5.— 7. Sept. | — | 1,00008 | — |
| 9. Nov. | — | 1,00020 | — |
| 21. Nov. | 0,001 509 | 1,00025 | 1,00841 |
| 22. Nov. | 0,001 489 | — | — |
| 7. Dec. | 0,001 499 | 1,00024 | 1,00839 |
| 25.—26. Jan. 1886 | 0,001 510 | 1,00024 | — |
| 14.—15. März | 0,001 510 | 1,00027 | — |

Eigenthümlich ist es, dass trotz des grossen absoluten Werthes der Aenderungen von *DI* und *DII* (0,00175 und 0,00182) dieselben fast parallel verlaufen, sodass die Differenz *DII* — *DI*, welche am 23. März 1884 0,00805 betrug, am 7. December 1885 0,00815 geworden ist. Allerdings waren beide Drähte derselben Rolle entnommen.

Um den Widerstand der einzelnen Rollen von *WQ* in m/qmm Hg zu erhalten, wurden dieselben nach der Methode des übergreifenden Nebenschlusses auf die Doseneinheit Nr. 1195 bezogen. Hierbei wurde ein Substitutionsverfahren in der Weise angewendet, dass die Dose wie die Stücke von *WQ* mit *DI* oder *DII* verglichen wurden.

Den Temperaturcoefficienten setze ich gleich dem Mittel der für drei Stücke aus derselben Drahtrolle gefundenen Werthe:

| | |
|-------------------|-----------------------|
| Stück von 5 S.-E. | 0,0 ₃ 3794 |
| <i>DI</i> | 0,0 ₃ 3767 |
| <i>DII</i> | 0,0 ₃ 3798 |
| Mittel | 0,0 ₃ 3786 |
| | ± 13 |

Nachstehende Zusammenstellung enthält für 10° den Widerstand der einzelnen Rollen von *WQ* in m/qmm Hg,

und zwar gemessen zwischen den Quecksilbernäpfen in denjenigen Kupferblöcken, mit welchen die betreffende Rolle verbunden war. Unter Δ ist die Differenz gegen den zehnten Theil der Summe der Widerstände angegeben.

| | 24., 25., 27. Feb. 1884* | | 20. Juli 1884 | | 5. Juni 1885* |
|-----------------|-----------------------------|----------|---------------|----------|------------------|
| | m/qmm Hg | Δ | m/qmm Hg | Δ | |
| $0,5_1 + 0,5_2$ | 0,98974 | -250 | 0,99080 | -248 | |
| 1_1 | 0,99263 | + 39 | 0,99361 | + 33 | 0,99424 |
| 1_2 | 0,98928 | -296 | 0,99028 | -300 | 0,99098 |
| 1_3 | 0,99286 | + 62 | 0,99391 | + 63 | 0,99471 |
| 1_4 | 0,99244 | + 20 | 0,99345 | + 17 | |
| 1_5 | 0,99648 | + 424 | 0,99749 | + 421 | |
| 1_6 | 0,99253 | + 29 | 0,99359 | + 31 | |
| 1_7 | 0,99199 | - 25 | 0,99303 | - 25 | |
| 1_8 | 0,99206 | - 18 | 0,99316 | - 12 | |
| 1_9 | 0,99239 | + 15 | 0,99347 | + 19 | |
| $1_{10} \Sigma$ | 0,99224 | | 0,99328 | | |

* Messung mit Benutzung von *UWP* als Wheatstone'sche Brücke.

| | 4. u. 6. Juli 1885 | | 21. u. 22. Nov. 1885 | | 7. Dec. 1885 | | 27. Jan. 1886 | |
|-----------------|-----------------------|----------|-------------------------|----------|--------------|----------|---------------|----------|
| | m/qmm Hg | Δ | m/qmm Hg | Δ | m/qmm Hg | Δ | m/qmm Hg | Δ |
| $0,5_1 + 0,5_2$ | 0,99147 | -246 | 0,99174 | -247 | 0,99171 | -249 | 0,99171 | -250 |
| 1_1 | 0,99427 | + 34 | 0,99446 | + 26 | 0,99453 | + 33 | 0,99453 | + 32 |
| 1_2 | 0,99097 | -296 | 0,99122 | -299 | 0,99121 | -299 | 0,99121 | -300 |
| 1_3 | 0,99456 | + 63 | 0,99485 | + 64 | 0,99484 | + 65 | 0,99484 | + 63 |
| 1_4 | 0,99408 | + 15 | 0,99438 | + 17 | 0,99438 | + 19 | 0,99438 | + 17 |
| 1_5 | 0,99814 | + 421 | 0,99844 | + 423 | 0,99841 | + 421 | 0,99843 | + 422 |
| 1_6 | 0,99424 | + 31 | 0,99458 | + 38 | 0,99453 | + 33 | 0,99457 | + 36 |
| 1_7 | 0,99366 | - 27 | 0,99395 | - 26 | 0,99392 | - 27 | 0,99395 | - 26 |
| 1_8 | 0,99380 | - 13 | 0,99409 | - 12 | 0,99407 | - 12 | 0,99411 | - 10 |
| 1_9 | 0,99411 | + 18 | 0,99437 | + 16 | 0,99435 | + 15 | 0,99436 | + 15 |
| $1_{10} \Sigma$ | 0,99393 | | 0,99421 | | 0,99420 | | 0,99421 | |

Zur weiteren Rechnung verwendet sind für den Sommer die Werthe vom 4. und 6. Juli 1885, für den Herbst und Winter das Mittel der Werthe vom November, December und Januar.

Schliesslich wird derjenige Widerstand gebraucht, welcher durch Herausheben eines Bügels hinzugefügt wird. Indem ich neben den beiden Enden eines Bügels amalgamirte Drähte in die Quecksilbernäpfe tauchte und mit einem graduirten Galvanometer verband, erhielt ich den Widerstand eines Bügels 0,0,28 S.-E.

Ich vereinige noch die durch Herausnehmen der einzelnen Bügel in den Stromkreis eingeschalteten Widerstände für 10^0 und ihre Aenderung für 1^0 Temperaturerhöhung.

| | Sommer m/qmm Hg | Herbst u. Winter m/qmm Hg | $\Delta 1^0$. |
|-----------------|--------------------|------------------------------|----------------|
| $0,5_1 + 0,5_2$ | 0,99141 | 0,99167 | 0,000 374 0 |
| 1 ₁ | 0,99424 | 0,99448 | 375 1 |
| 1 ₂ | 0,99094 | 0,99118 | 373 9 |
| 1 ₃ | 0,99453 | 0,99482 | 375 2 |
| 1 ₄ | 0,99405 | 0,99435 | 375 1 |
| 1 ₅ | 0,99811 | 0,99840 | 376 4 |
| 1 ₆ | 0,99421 | 0,99453 | 375 1 |
| 1 ₇ | 0,99363 | 0,99391 | 374 9 |
| 1 ₈ | 0,99377 | 0,99406 | 375 0 |
| 1 ₉ | 0,99408 | 0,99433 | 375 0 |

Eine Vergleichung der zu verschiedenen Zeiten erhaltenen Werthe von $\frac{1}{10} \Sigma$ zeigt, dass im Mittel der Widerstand einer Rolle von etwa 1 S.-E. zugenommen hat um 0,00197, also etwa um ebensoviele wie *DI* und *DII*. Dagegen sind die relativen Werthe bis auf wenige Hunderttausendtheile unverändert geblieben, wie aus einem Blick auf die Columne Δ sofort hervorgeht.

14. Galvanometer. Um den für einige unbedeutende Reductionen erforderlichen Temperaturcoëfficienten des Widerstandes zu erhalten, wurde das Galvanometer in einem Nebenzimmer aufgestellt, dessen Temperatur durch Heizen verändert wurde, und der Widerstand mit Hülfe des im Beobachtungssaal befindlichen *UWP* gemessen. Als Temperatur des Galvanometerdrahtes wurde diejenige genommen, welche ein in die oben erwähnte Drahtrolle (vgl. p. 31) unter dem Galvanometergehäuse eingeführtes, in Zehntelgrade getheiltes Thermometer zeigte, und mit den Messungen erst begonnen, wenn dasselbe mehrere Stunden nur geringe Schwankungen gezeigt hatte.

Es ergab sich so:

Widerstand m/qmm Hg.

| | Zeit | t | beob. | ber. | Diff. |
|----------------|------------------------|---------------------|--------|--------|---------|
| 12. April 1885 | 6 ^h — p. m. | 10,42 | 3,5843 | 3,5851 | —0,0008 |
| 13. „ „ | 9 — a. m. | 9,81 | 3,5762 | 3,5763 | —0,0001 |
| | 10 12 p. m. | 19,30 ^{*)} | 3,7114 | 3,7122 | —0,0008 |
| 14. „ „ | 12 50 p. m. | 15,71 | 3,6628 | 3,6608 | +0,0020 |
| | 5 36 p. m. | 16,09 | 3,6668 | 3,6663 | +0,0005 |
| | | | | | ±0,0008 |

*) Temperaturen vorher: 3^h 45': 19,16°; 6^h 15': 19,27°; 7^h 15': 19,38°; 8^h 0': 19,38°; 8^h 30': 19,34°.

Die berechneten Widerstände sind erhalten nach:

$$W_t = 3,4359 + 0,014317 t = 3,4359 (1 + 0,004167 t),$$

da zur Aufstellung einer quadratischen Formel die Beobachtungen nicht ausreichten.¹⁾

Die Bestimmung des Coëfficienten der Selbstinduction habe ich zweimal nach derselben Methode, aber mit ganz verschiedenen Hilfsmitteln ausgeführt.

Zunächst wurde ein Ablenkungsversuch nach der Fig. 12 dargestellten Schaltung angestellt. T bedeutet eine Tangentenbussole, G ein Hülfsgalvanometer, W_n einen Nebenschlussdraht.

Ist A der Reductionsfactor der Tangentenbussole, Φ_1 ihre Ablenkung, C und φ_1 dieselben Grössen für das Hülfsgalvanometer, so ist:

$$(26) \quad C = A \frac{W_n}{W_g + W_n} \frac{\text{tg } \Phi_1}{\varphi_1}.$$

Für den Inductionsversuch wurde das Schema der Wheatstone'schen Brücke (Fig. 13) in der Weise benutzt, dass das Hauptgalvanometer in einem Seitenzweige w_1 sich befand, während die drei anderen Seitenzweige w_2, w_3, w_4 von Selbstinduction merklich frei waren. Der eine Diagonalzweig

1) An einer späteren Stelle (vgl. § 27) sind die gelegentlich der Hauptbeobachtungen erhaltenen Widerstände von Galvanometer + Zuleitung als Function der Temperatur durch eine quadratische Formel dargestellt worden. Berechnet man aus derselben W_{10} und W_{20} und hieraus wieder eine lineare Formel, so findet man den Temperaturcoëfficienten 0,004202 mit dem obigen (0,004167) bis auf weniger als 1 Proc. übereinstimmend.

w_0 enthielt das Hülfsgalvanometer, der andere W_0 die Batterie, die Tangentenbussole und einen Unterbrecher. Uebrigens war die Batterie wie die Tangentenbussole mit einem besonderen Commutator versehen.

Sind die Seitenzweige so abgeglichen, dass w_0 stromlos ist, so läuft durch das Hauptgalvanometer der Strom:

$$(27) \quad i_1 = \frac{J_0(w_3 + w_4)}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} = \frac{A \operatorname{tg} \Phi_2 (w_3 + w_4)}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4},$$

wo Φ_2 die Ablenkung der Tangentenbussole ist.

Durch Unterbrechung von J_0 tritt infolge der Selbstinduction in w_1 eine electromotorische Kraft Πi_1 auf, und durch das Hülfsgalvanometer geht die Electricitätsmenge:

$$(28) \quad i_0' = \frac{\Pi i_1 (w_2 + w_4)}{(w_1 + w_3)(w_2 + w_4) + w_0(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)}.$$

Erzeugt dieselbe den ersten Ausschlag q_2 und bezeichnen T , λ , k Schwingungsdauer, log. Decr. und Dämpfungsverhältniss, so ist:

$$(29) \quad i_0' = C \frac{T}{\pi} q_2 k^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Aus den Gleichungen (26) bis (29) folgt:

$$(30) \quad H = \frac{T}{\pi} \frac{q_2 \operatorname{tg} \Phi_1}{q_1 \operatorname{tg} \Phi_2} \cdot \frac{W_n(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) [(w_1 + w_3)(w_2 + w_4) + w_0(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)]}{(W_g + W_n)(w_3 + w_4)(w_2 + w_4)} \times k^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda}},$$

und zwar in $\text{m/qmm Hg} \times \text{sec.}$ ausgedrückt, wenn die Widerstände in Quecksilbereinheiten gegeben sind. Uebrigens kann q_2/q_1 durch das Verhältniss n_2/n_1 der den Bogen proportional gemachten Scalentheile, und $\operatorname{tg} \Phi_1/\operatorname{tg} \Phi_2$ durch N_1/N_2 ersetzt werden, wenn diese auf Tangenten reducirt sind.

Bei der ersten in Darmstadt am 31. August und 5. September 1884 ausgeführten Versuchsreihe war der Magnet aus dem Hauptgalvanometer entfernt¹⁾, die Seitenzweige w_2 und w_4 waren Theile eines ausgespannten Platindrahtes, w_3 enthielt den Stöpselrheostaten WK_1 oder WK_2 , und das Hülfsgalvanometer war ein zu einem Erdinductor gehöriges Instrument von Meyerstein mit astatischem Magnetpaar.

1) Vgl. hierzu p. 25, Anm.

Nachstehende Zusammenstellung enthält die Resultate.

| 31. August 1884. | | | | 5. September 1884. | |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--|--------------------------|
| W_n | 1,0012 | — | — | 1,0011 | — |
| W_g | 4991,3 | 6985,7 | 4991,3 | 8979,6 | 6985,9 |
| N_1 | 73,52 | 129,57 | 74,19 | 129,91 | 130,69 |
| n_1 | 221,9 | 278,7 | 223,0 | 215,05 | 278,50 |
| $N_1 W_n$ | 6,645 · 10 ⁻⁵ | 6,662 · 10 ⁻⁵ | 6,672 · 10 ⁻⁵ | 6,734 · 10 ⁻⁵ | 6,724 · 10 ⁻⁵ |
| $n_1 W_g + W_n$ | | | | | |
| Mittel 6,660 · 10 ⁻⁵ | | | | 6,729 · 10 ⁻⁵ | |
| $w_1 = 3,7150$; $w_2 = 1,4628$; $w_3 = 3,0452$; $w_4 = 1,1991$; $T = 26,903$. | | | | $w_1 = 3,7098$; $w_2 = 1,3271$; $w_3 = 3,7440$; $w_4 = 1,3394$; $T = 26,775$. | |
| w_0 | 0,8137 | 1,8150 | | 0,8122 | 2,8020 |
| $n_2^1)$ | 515,0 | 397,0 | | 596,85 | 382,45 |
| N_2 | 66,09 | 66,18 | | 64,99 | 65,14 |
| $h/brigg$ | 0,4399 | 0,3647 | | 0,2463 | 0,1438 |
| H | 0,1427 | 0,1421 | | 0,1420 | 0,1415 |
| Mittel $H = 0,1424$ | | | | 0,1418 | |
| Hauptmittel $H^2) = 0,1421$ m qmm Hg × sec. | | | | | |

Um die Möglichkeit eines groben Irrthums auszu-schliessen, verglich ich noch den Selbstinductionscoefficienten des Hauptgalvanometers mit dem von Hrn. Sivert Rasmussen bestimmten Inductionscoefficienten eines kleinen Inductionsapparates und erhielt so 0,141 m/qmm Hg. × sec.

Die Messungen in Halle (Sept. 1887) wurden theils ohne, theils mit dem festgelegten Magnet des Hauptgalvanometers ausgeführt. Hier waren die Seitenzweige w_2 , w_3 , w_4 mit Hülfe eines Universalwiderstandes hergestellt; zur Abgleichung diente ein im Nebenschluss von w_3 befindlicher Stöpselrheostat. Als Hülfs-galvanometer wurde ein Wiedemann'sches Galvanometer mit beschwertem Magnet benutzt.³⁾

1) Mittel aus vier Werthen für die vier möglichen Stellungen der Commutatoren.

2) Hier fehlt noch die Rückwirkung des Galvanometermagnets.

3) Bei dieser Gelegenheit wendete ich ein Hilfsmittel an, welches die Messungen, deren Schwierigkeit bekanntlich in der langsamen Beruhigung des Hülfs-galvanometers liegt, ausserordentlich erleichterte. Ein zweites Hülfs-galvanometer mit rasch schwingendem, stark gedämpftem Magnet wurde so aufgestellt, dass es durch Umlegen eines Umschalters statt des ersten in den Brücken-zweig eingeschaltet werden konnte.

Es wurde erhalten ohne den Magnet:

15. September 1887 0,1421.

17. September 1887 0,1425 und 0,1422, Mittel 0,1423.

Hauptmittel 0,1422 m/qmm Hg \times sec.

Vergleichende Beobachtungen mit und ohne Magnet am 16., 17., 18. September 1887 ergaben für die durch Anwesenheit des Magnets bedingte Differenz 0,00240, 0,00259, 0,00295 im Mittel 0,00265.¹⁾ Diese Grösse zu 0,14215, dem Mittel der in Darmstadt und Halle ohne Magnet gefundenen Werthe, addirt, liefert endlich den *Coëfficienten der Selbstinduction einschliesslich der Rückwirkung des Magnets*:

$$H = 0,1448 \text{ m/qmm Hg} \times \text{sec.} = 1,363 \cdot 10^9 \text{ mm.}$$

Die Aenderung der Galvanometerfunction habe ich zunächst durch Beobachtung der Dämpfung für verschiedene Winkel zwischen der Ruhelage des Magnets und der Windungsebene des Multiplicators bestimmt.

Die oben p. 32 beschriebene Einrichtung des Stativs für das Galvanometer erlaubte, den Multiplicator gegen den von der Zimmerdecke herabhängenden Magnet um beliebige Winkel zu drehen.

Auf das Gehäuse war ein Spiegel geklebt, welcher mit Fernrohr und Scala (Doppelmillimeter) beobachtet wurde.

Das log. Decr. wurde nach der Zurückwerfungsmethode mit Hülfe eines Magnetinductors ermittelt; die Schwingungsdauer wurde für jeden Satz aus dem Stand des Intensitätsvariometers und der Temperatur des Magnets unter Zugrundelegung eines Normalwerthes berechnet, was hier einer directen Beobachtung weit vorzuziehen ist. Der Scalenabstand des Galvanometerspiegels betrug 3021 Scalentheile.

Da die Galvanometerfunction mit der in meiner früheren Arbeit eingeführten Grösse q durch die Beziehung $q = GM$

Die Abgleichung der Widerstände wurde mit Benutzung des zweiten Galvanometers ausgeführt, der Umschalter umgelegt und sofort der Stammstrom unterbrochen.

1) Wie schon Wied. Ann. 35. p. 191 angegeben, berechnet man diese Grösse aus der Galvanometerfunction und dem Coëfficienten der Quermagnetisirung zu $a^2 G = 0,00295 \cdot \text{m/qmm Hg.}$

zusammenhängt, so kann die dort unter (15) angeführte Formel¹⁾ geschrieben werden:

$$(31) \quad F(\chi) = \frac{M^2}{2 K R} G^2(\chi) = \frac{1}{T_0} \left[\lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0 \right],$$

(wo χ den Winkel zwischen der Windungsebene des Multiplimators und der Axe des Magnets bedeutet), und mit Vernachlässigung höherer Potenzen gesetzt werden:

$$(32) \quad F(\chi) = F_0 (1 - \xi' \chi^2), \quad G(\chi) = G_0 (1 - \frac{1}{2} \xi' \chi^2).$$

Dem mittleren Scalenthail der Doppelmillimeterscala entspreche der Winkel $\chi = \delta$, und φ werde von dieser Lage aus gezählt.

Für $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ seien die Grössen λ, λ_0, T_0 ermittelt und die zugehörigen Werthe F_1, F_2, F_3 von F aus (31) berechnet, so folgt aus den Gleichungen:

$$(33) \quad \begin{aligned} F_1 &= F(\varphi_1 + \delta) = F_0 [1 - \xi' (\varphi_1 + \delta)^2], \\ F_2 &= F(\varphi_2 + \delta) = F_0 [1 - \xi' (\varphi_2 + \delta)^2], \\ F_3 &= F(\varphi_3 + \delta) = F_0 [1 - \xi' (\varphi_3 + \delta)^2] \quad \text{zunächst:} \end{aligned}$$

$$(34) \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{(F_1 - F_3)(\varphi_2^2 - \varphi_1^2) - (F_1 - F_2)(\varphi_3^2 - \varphi_1^2)}{(F_1 - F_2)(\varphi_3 - \varphi_1) - (F_1 - F_3)(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$(35) \quad F_0 \xi' = \frac{(F_1 - F_2)(\varphi_3 - \varphi_1) - (F_1 - F_3)(\varphi_2 - \varphi_1)}{(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_3 - \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_3)}.$$

Indem man mit (35) in eine der Gleichungen (33) hineingeht, erhält man F_0 und damit endlich aus (35) ξ' .

Es wurde nun beobachtet (25. Mai 1885):

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
|---------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Ablesung | | | | | | |
| Doppelmillim. | 245,3 | 372,8 | 124,1 | 124,1 | 373,6 | 243,7 |
| Gr. Bogen . . | 190,48 | 188,18 | 188,53 | 188,54 | 188,07 | 190,14 |
| Kl. Bogen . . | 93,42 | 93,86 | 93,74 | 93,64 | 93,79 | 93,31 |
| λ (brigg) | 0,30941 | 0,30209 | 0,30346 | 0,30394 | 0,30216 | 0,30914 |
| T_0 | 12,0323 | 12,0324 | 12,0323 | 12,0323 | 12,0317 | 12,0310 |

| | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | |
|-------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|--|
| Ablesung | | | | | | |
| Doppelmillim. | 489,2 | 7,4 | 7,4 | 483,4 | 239,1 | |
| Gr. Bogen . . | 182,96 | 183,12 | 183,17 | 183,00 | 190,05 | |
| Kl. Bogen . . | 94,64 | 94,53 | 94,53 | 94,74 | 93,18 | |
| λ (brigg) | 0,28629 | 0,28717 | 0,28728 | 0,28592 | 0,30955 | |
| T_0 | 12,0307 | 12,0299 | 12,0295 | 12,0292 | 12,0287 | |
| λ_0 (brigg) = 0,00146 | | | | | | |

1) E. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 779 1882.

Hieraus wurden für die weitere Rechnung Mittelwerthe gebildet und zur Berechnung der q und F verworhet:

| | I. | | |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | 1. 6. | 2. 5. | 3. 4. |
| Ablesung in mm | 489,0 | 746,4 | 248,2 |
| $n^1)$ | -11,0 | +246,4 | -251,8 |
| $q^2)$ | $q_1 = -0,190^\circ$ | $q_2 = +4,187^\circ$ | $q_3 = -4,314^\circ$ |
| λ (brigg) | 0,309 28 | 0,302 13 | 0,303 70 |
| T_0 | 12,031 7 | 12,032 1 | 12,032 3 |
| F | 0,057 446 | 0,056 171 | 0,056 452 |
| | $= F_1$ | $= F_2$ | $= F_3$ |

| | II. | | |
|-------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| | 6. 11. | 7. 10. | 8. 9. |
| Ablesung in mm | 482,8 | 972,6 | 14,8 |
| $n^1)$ | -17,2 | +472,6 | -485,2 |
| $q^2)$ | $q_1 = 0,296^\circ$ | $q_2 = 7,856^\circ$ | $q_3 = -8,170^\circ$ |
| λ (brigg) | 0,309 35 | 0,286 11 | 0,287 23 |
| T_0 | 12,029 9 | 12,030 0 | 12,029 7 |
| F | 0,057 465 | 0,053 316 | 0,053 519 |
| | $= F_1$ | $= F_2$ | $= F_3$ |

1) Ablenkung vom mittleren Scalentheile aus.

2) Der aufgeklebte Spiegel hatte zur Drehungsaxe eine seitliche Lage, und die in Rechnung zu setzenden Scalenabstände waren der Reihe nach 1667,0; 1673,8; 1660,1; 1666,5; 1679,8; 1653,9.

Hieraus folgt schliesslich:

I. $\delta = 0,328^\circ = 9,53$ Doppelmillimeter $\xi' = 3,578$,

II. $\delta = 0,258^\circ = 7,49$ „ „ $\xi' = 3,601$,

wo die Werthe von ξ' bereits so umgerechnet sind, wie eine Angabe der Winkel in absolutem Maasse es erfordert.

Der Mittelwerth der δ ist 8,5 Doppelmillimeter; demnach war, um die Windungsebene mit der Vertical-ebene durch die Magnetaxe zusammenfallen zu lassen, auf $250 - 8,5 = 241,5$ einzustellen. Thatsächlich erreicht wurde 241,8 (26. Mai 1885).

Wird der ersten Serie das doppelte Gewicht beigelegt, weil die bei der zweiten benutzten Winkel schon viel grösser sind, als die bei den eigentlichen Beobachtungen vorkommenden, so wird:

$\xi' = 3,586$.

Die angeführten Beobachtungen können noch in einer anderen Art zur Berechnung von δ und ξ' benutzt werden. Nach bekannten Formeln¹⁾ kann man nämlich aus der Schwingungsdauer, dem grossen und dem kleinen Bogen die Winkelgeschwindigkeit ableiten, welche ein Inductionsstoss dem Magnet ertheilt. Die so erhaltenen Winkelgeschwindigkeiten aber sind der Galvanometerfunction proportional, also auch mit: $1 - \frac{1}{2}\xi'(\varphi + \delta)^2$, sodass eine ganz ähnliche Behandlung wie oben möglich ist.

Ich gebe nur die (auf Scalentheile bezogenen) Winkelgeschwindigkeiten und die Werthe von δ und ξ' .

| I. | | | II. | | |
|---|-----------|-----------|---|------------|-----------|
| 1. 41,876 | 2. 41,392 | 3. 41,464 | 6. 41,807 | 7. 40,313 | 8. 40,347 |
| 6. 41,807 | 5. 41,370 | 4. 41,464 | 11. 41,794 | 10. 40,329 | 9. 40,359 |
| Mittel 41,841 | 41,381 | 41,464 | 41,801 | 40,321 | 40,353 |
| $\delta = 0,275^\circ$, $\xi' = 3,627$. | | | $\delta = 0,201^\circ$, $\xi' = 3,582$. | | |

Die Uebereinstimmung ist befriedigend.

Der zur Reduction des „statischen Empfindlichkeitscoëfficienten“ p auf unendlich kleine Amplituden (vgl. Formel(22)) gebrauchte Factor η' folgt aus ξ' und dem Torsionsverhältniss Θ nach²⁾:

$$\eta' = \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{6(1+\Theta)}.$$

Da nun für die Hauptbeobachtungen im Sommer und im Herbst $\Theta = 0,00581$, im Winter $0,00167$, so wird $\eta' = 1,627$ in beiden Fällen.

Die Grösse η' kann unmittelbar erhalten werden aus Ablenkungsbeobachtungen, indem ein durch eine Tangentenbussole gemessener Strom zwischen dem Galvanometer und einem Nebenschlusswiderstande verzweigt wird. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, will ich nur anführen, dass zwei

1) Ist a und b der grosse und kleine bei der Zurückwerfungsmethode erhaltene Bogen, so ist die Winkelgeschwindigkeit:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\pi}{2T_0} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} k - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a}{b}.$$

2) E. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 780. 1882.

Beobachtungsreihen am 27. Mai 1885 auf $\eta' = 1,594$ und 1,610 führten, und ähnliche Werthe aus den gelegentlich der Hauptbeobachtungen gewonnenen Daten abgeleitet wurden z. B. 21. Juni 1885: $\eta' = 1,622$; 28. Juni 1885: $\eta' = 1,666$.

Endlich habe ich noch nach Beendigung der Hauptbeobachtungen eine Bestimmung von ξ' nach der Methode von Hrn. F. Kohlrausch¹⁾ vorgenommen. Eine Beobachtungsreihe vom 9. März 1886, bei welcher der Multiplikator um $+4,687$ und $-4,623^0$ gedreht wurde, ergab $\xi' = 3,651$, woraus $\eta' = 1,659$. Indessen halte ich die zuerst angestellten Beobachtungen für die sichersten und behalte daher die Werthe $\xi' = 3,586$, $\eta' = 1,627$ bei.²⁾

Für den Coëfficienten Σ_2' zur Reduction der log. Decr. auf unendlich kleine Amplituden wurden nach den Formeln³⁾:

$$(36) \left\{ \begin{aligned} c &= \lambda \sqrt{\frac{\pi^2 + \lambda_0^2}{\pi^2 + \lambda^2}} - \lambda_0, & m_1 &= \frac{\xi'}{1 + \frac{\lambda_0}{c}}, & n_1 &= \frac{1}{\Theta(1 + \Theta)}, \\ \Sigma_2' &= \frac{0,43429}{4A^2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{(1 - e^{-\lambda}) (1 + e^{-3\lambda})}{(1 + e^{-\lambda})^2} \cdot \frac{4m_1(7\lambda^2 + \pi^2) - n_1(23\lambda^2 + 11\pi^2)}{\lambda^2 + 4\pi^2} \end{aligned} \right.$$

Tafeln entworfen. Hierin bedeutet A den Scalenabstand des Hauptgalvanometers (bei allen Beobachtungen hinreichend nahe $= 3037,5$), Θ wurde $= 0,00581^3$ $\lambda_0 = 0,00366$ (natürl. Log.) angenommen. Es war z. B.:

| | | | | | | | |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\lambda_{\text{brigg.}} =$ | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
| $\Sigma_2' = 10^{-9} \times$ | 1,918 | 0,205 | 1,548 | 1,956 | 2,443 | 3,016 | 3,681 |
| $\lambda_{\text{brigg.}} =$ | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | |
| $\Sigma_2' = 10^{-9} \times$ | 4,440 | 5,800 | 6,266 | 7,323 | 8,476 | 9,725 | |

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 26. p. 430. 1885.

2) Man findet mitunter Galvanometerbeobachtungen so berechnet, dass die Stromstärke einfach der Tangente des Ablenkungswinkels proportional gesetzt wird. Dies kommt darauf hinaus, die Galvanometerfunction mit $\cos \chi = 1 - 0,5 \chi^2 + \dots$ proportional zu nehmen, während dieselbe trotz der ziemlich grossen Breite des Multiplikatorrahmens hier mit $1 - \frac{1}{2} \xi' q^2 = 1 - 1,793 q^2$ proportional ist, also sehr viel schneller abnimmt. Der Unterschied würde für 0,05 abs. $= 2,86^0$ etwa 0,0032, für 0,1 abs. $= 5,73^0$ etwa 0,0129, also bereits 1,3 Proc. betragen.

3) Vgl. K. Schering, Wied. Ann. 9. p. 287. 1880 u. E. Dorn, l. c. p. 781

4) Eine Neuberechnung mit $\Theta = 0,00167$ für den Winter wäre überflüssig gewesen.

Ich habe es nicht für überflüssig gehalten, durch besondere Beobachtungen festzustellen, dass hiernach reducirte Dämpfungsbeobachtungen mit grossen und kleinen Amplituden auf denselben Werth führen.

Nachstehendes Täfelchen vereinigt die Ergebnisse dieser Beobachtungen. Unter b_1 steht der runde Mittelwerth des grossen Bogens, unter $\lambda_{(\text{brigg.})}$ das auf unendlich kleine Bogen reducirte log. Decr., endlich unter A die Differenz der Werthe für grosse und kleine Amplituden.

| Widerstand | Datum | b_1 | $\lambda_{(\text{brigg.})}$ | b_1 | $\lambda_{(\text{brigg.})}$ | A |
|---------------------------|-----------|---------|-----------------------------|---------|-----------------------------|----------------|
| Galv. allein | 1886 | | | | | |
| | 14. Febr. | 330 | 0,76799 | 530 | 0,76803 | + 0,004 |
| | 25. " | 365 | 0,77017 | 530 | 0,77017 | \pm 0 |
| Galv. + 1_s | 27. " | 295 | 0,76922 | 400 | 0,76895 | - 27 |
| | 25. Febr. | 400 | 0,56747 | 570 | 0,56758 | + 11 |
| | 27. " | 270 | 0,56617 | 450 | 0,56638 | + 21 |
| Galv. + $1_s + 1_a$ | 6. März | 290 | 0,56706 | 470 | 0,56698 | - 8 |
| | 14. Febr. | 230 | 0,45292 | 650 | 0,45265 | - 27 |
| | 25. " | 225 (a) | 0,45349 | 660 (c) | 0,45345 | - 13 ($b-a$) |
| Galv. + $1_s + 1_a + 1_r$ | | 480 (b) | 0,45336 | | | - 4 ($c-a$) |
| | | | | | | + 9 ($c-b$) |
| | 6. März | 330 | 0,45301 | 490 | 0,45330 | + 29 |
| Galv. + $1_s + 1_a + 1_r$ | 22. Febr. | 280 | 0,38006 | 660 | 0,38006 | \pm 0 |
| | 23. " | 265 | 0,37967 | 640 | 0,37956 | - 11 |
| | 25. " | 270 | 0,37909 | 660 | 0,37894 | - 15 |
| | 6. März | 345 | 0,37884 | 540 | 0,37900 | + 16 |

In den Differenzen ist eine Tendenz nach der positiven oder negativen Seite nicht zu erkennen.

Ebenso zeigen in den Hauptbeobachtungen vom 13. und 17. Nov. 1885 mit belastetem Magnet, wo immer drei aufeinanderfolgende Bogen beobachtet werden konnten, die für grosse und kleine Amplituden erhaltenen Werthe von λ eine gute Uebereinstimmung.

Durch den Localeinfluss des diamagnetischen Multiplicators wird ein Drehungsmoment entstehen, welches merklich dem Winkel zwischen der Windungsebene und der Magnetaxe proportional ist und im Sinne einer Vergrösserung dieses Winkels wirkt. Es wird sich daher ebenso verhalten, als wenn die Horizontalintensität um einen gewissen Bruchtheil verkleinert wäre.

Um diesen Betrag zu ermitteln, wurde zunächst der Multiplicator um gemessene Winkel gedreht und die Ablenkung des Magnets unter Berücksichtigung der Declinationsänderung bestimmt. Der Quotient der beiden Winkel gibt hinreichend nahe die relative Aenderung von H .

Es wurde so erhalten (Scalenabstand 3021 Scalentheile).

| Datum | Multipli- cator | Magnet | Drehung | | $-\Delta H/H$ |
|--------------|--------------------|--------|----------|-------------|---------------|
| | | | Multipl. | Magnet | |
| 14. Mai 1885 | +16,8° | 498,17 | +39,85° | | 0,00016 |
| | −21,1° | 498,75 | | −0,65 Seth. | |
| | +20,7° | 498,03 | | = −0,00616° | |
| 16. Mai 1885 | 250,8 1) | 500,09 | +15,94 | | 0,00010 |
| | 478,5 | 500,00 | | −0,17 Seth. | |
| | 2,6 | 500,17 | | = −0,00161° | |
| 22. Mai 1885 | 253,9 | 498,74 | + 8,67 | | 0,00012 |
| | 378,5 | 498,70 | | −0,11 Seth. | |
| | 124,4 | 498,81 | | = −0,00104° | |
| Mittel | | | | | 0,00013 |

1) Spiegel am Galvanometergehäuse; Abstand der Doppelmillimeter-scala 1666 mm.

Ferner wurden Schwingungsbeobachtungen mit und ohne Multiplicator angestellt und mit Hülfe der gleichzeitigen Ablesungen des Intensitätsvariometers auf gleiche Werthe der Horizontalintensität, wie auch auf gleiche Temperatur des Magnets reducirt. Messungen dieser Art, welche ich übrigens für weniger zuverlässig halte, vom 17. und 24. Mai 1885 führten auf $-\Delta H/H = 0,0_{,17}$ und $0,0_{,10}$; also im Mittel zufällig mit dem obigen Werthe übereinstimmend.

Das Torsionsverhältniss für den bei den Hauptbeobachtungen benutzten Hohlmagnet (4) wurde gefunden:

Messingdraht.

| Dat. | Θ | Dat. | Θ | Dat. | Θ |
|--------------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|
| 5. Juni 1885 | 0,005 812 | 20. Oct. 1885 1) | 0,005 860 | 12. Nov. 1885 2) | 0,005 773 |
| 2. Juli 1885 | 0,005 837 | 9. Nov. 1885 | 0,005 846 | 26. Nov. 1885 2) | 0,005 781 |
| Mittel | | 0,005 853 | | 0,005 777 | |

1) Inzwischen waren die magnetischen Verhältnisse geändert s. II.

2) Magnet mit 200 g belastet.

Eisendraht (0,1 mm Durchmesser).

| Dat. | Θ | Dat. | Θ |
|---------------|-----------|-----------------------------|-----------|
| 30. Nov. 1885 | 0,001 660 | 18. Jan. 1886 ¹⁾ | 0,001 638 |
| 12. Dec. 1885 | 0,001 664 | 22. Jan. 1886 | 0,001 633 |

1) Am 16. Januar 1886 brach der Draht dicht über der unteren Befestigung, doch konnte er noch benutzt werden. Da bei dem neuen Einklemmen seine Länge von 2224 mm auf 2213 mm herabgesetzt war, hätte das Torsionsverhältniss vor dem Abreissen 0,001630 betragen. Die Verringerung rührt her von einer Oxydation des Drahtes, die unten unmerklich, oben bedeutender war.

Ueber die Bestimmung des Temperaturcoefficienten des zum Galvanometer gehörigen Hohlmagnetes 4, sowie über das durch die magnetisirende Kraft 1 in ihm inducirte Längs- und Quermoment habe ich bereits an einer anderen Stelle berichtet.¹⁾

Die Werthe dieser Grössen sind folgende:

Temperaturcoefficient $\mu = 0,0,3281$,

Coëfficient der Längsmagnetisirung $\gamma = 0,00555 \cdot 10^7$,

„ „ Quermagnetisirung $\alpha = 0,0,3767 \cdot 10^7$.

Das Trägheitsmoment ermittelte ich nach dem Gauss'schen Verfahren. Die auf die Belastungsgewichte (welche auf Stifte des Magnetträgers aufgesteckt wurden) bezüglichen Angaben sind folgende:

| Masse mg | | Durchmesser | | Trägheitsmoment um Axe durch Schwerpunkt |
|----------|---------|-------------|-------|---|
| | | aussen | innen | |
| 100 | 99998,4 | 28,10 | 3,26 | $0,9989 \cdot 10^7$ |
| 100 | 99999,8 | 27,89 | 3,28 | $0,9858 \cdot 10^7$ |
| | | | | $1,9847 \cdot 10^7 \text{ mg. qmm}$ |

Abstand der Schwerpunkte bei 0° 230,417 mm.²⁾

Durch Aufsetzen der Gewichte zugefügtes Trägheitsmoment bei 0° $k_0 = 2,67442 \cdot 10^9 \text{ mg. mm}^2$ Aenderung für 1° : $0,0,90 \cdot 10^9$.

Am 19. Nov. 1885 wurden folgende auf gleichen Stand

1) E. Dorn, Wied. Ann. 35. p. 275. 1888.

2) Ueber die Bestimmung s. E. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 789. 1882.

des Intensitätsvariometers reducirten Schwingungsdauern beobachtet (Temperatur $7,34^{\circ}$):

| Gewichte, Marken innen | Unbelastet | Gewichte, Marken aussen (180° gedreht) |
|---------------------------|------------|---|
| 18,7527 | 11,9680 | 18,7485 |
| 18,7530 | 11,9666 | 18,7494 |
| | 11,9673 | |
| 18,7528 | 11,9673 | 18,7490 |

Hauptmittel mit Gewichten 18,7509.

Torsionsverhältniss unbelastet 0,005846, belastet 0,005768.

Trägheitsmoment $K_{7,34} = 1,83877 \cdot 10^9$.

Da hiervon $1,104 \cdot 10^9$ auf den stählernen Magnet kommt, so folgt die Aenderung des ganzen Trägheitsmomentes für $1^{\circ} = 0,0,512 \cdot 10^9$ und $K_{10^{\circ}} = 1,83880 \cdot 10^9 \text{ mg. mm}^2$.

Aehnlich waren am 25. Nov. 1885 die Hauptmittel der reducirten Schwingungsdauern 11,9725 und 18,7590 bei $8,00^{\circ}$, woraus $K_{10^{\circ}} = 1,83883$ und im Mittel aus beiden Versuchen:

$$K_{10^{\circ}} = 1,83882 \text{ mg. qmm.}$$

15. Tangentenbusssole. — Die Bestimmung des mittleren Durchmessers wurde nach einigen vergeblichen Versuchen mit anderen Methoden in folgender Weise ausgeführt.

Das Ocular eines Meyerstein'schen Kathetometers wurde mit einem Scalennikrometer versehen und vor das Objectiv noch eine achromatische Linse geklebt, um eine kurze Sehweite zu erhalten.

Die Marmorplatte (ohne Draht) wurde auf einem um eine horizontale Axe drehbaren Brettchen befestigt und so aufgestellt, dass ihre Ebene in die Absehrichtung fiel. Durch Uebertragung auf einen daneben befindlichen verticalen Glasmaassstab wurden vier genau äquidistante Durchmesser gemessen. Zur Reduction wurde der Ausdehnungscoefficient des Marmors $0,0,545$ angenommen.¹⁾

Unter Benutzung zweier berichtigter Glasmaassstäbe ergab sich:

1) Bouniceau, Ann. des ponts et chaussées. 4. Sér. 1863. 1. Sém. p. 178.

| Durchmesser | 1 | 2 | 3 | 4 | Mittel |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2. Febr. 1885 | 496,974 | 497,003 | 496,945 | 496,915 | 496,959 |
| 4. „ „ | 496,956 | 496,987 | 496,939 | 496,909 | 496,948 |
| | | | | | 496,954 |

Zur Controle wurde die Scheibe auf einen ebenen Milchglasstreifen gelegt, kleine Schneiden aus Ebonit an die Enden eines Durchmessers angedrückt und mit Klebwachs auf den Glasstreifen festgekittet. Nach Erhärtung des Wachses wurde die Scheibe vorsichtig entfernt und der Abstand der Schneiden unter einem Comparator, dessen beide Mikroskope Ocularmikrometer hatten, durch Substitution mit dem Normalmeter verglichen.

Dieselben vier Durchmesser wurden so gefunden:

| Durchmesser | 1 | 2 | 3 | 4 | Mittel |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 8. Febr. 1885 | 496,989 | 496,978 | 496,939 | 496,970 | 496,969 |
| 9. „ „ | 496,997 | 496,998 | 496,958 | 496,935 | 496,972 |
| | | | | | 496,970 |

Die erste Messung ist weniger gelungen, gibt aber fast denselben Mittelwerth.

Endlich wurde nach Aufwinden des Drahtes eine katetometrische Messung ähnlich wie oben ausgeführt, wobei auf alle fünf Drahtwindungen eingestellt wurde. Der äussere Durchmesser war:

| Durchmesser | 1 | 2 | 3 | 4 | Mittel |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 14. März 1885 | 498,903 | 498,863 | 498,843 | 498,883 | 498,873 |
| 17. März 1885 a. m. | 498,872 | 498,895 | 498,878 | 498,849 | 498,873 |
| p. m. | 498,858 | 498,888 | 498,831 | 498,828 | 498,851 |
| | | | | | 498,865 |

Uebrigens ist hier, wie später mit Rücksicht darauf, dass der Draht beim Aufwinden scharf angezogen war, auch für die Windungen der Ausdehnungscoefficient des Marmors benutzt worden.

Mit Hilfe eines Schraubendickenmessers war der Durchmesser des Drahtes im Mittel aus sechs Stellen gefunden $0,950 \pm 0,008$ mm; demnach folgt aus den Resultaten der 3 Methoden für den mittleren Durchmesser der Windungen bei 0° in guter Uebereinstimmung:

497,920, 497,904, 497,915.

Zur weiteren Rechnung ist der letzte, vom Mittel 497,913 nur wenig abweichende Werth:

$$R = 497,915 \text{ mm}$$

benutzt.

Die fünf Windungen nahmen die Breite $b=7,9$ mm ein.

Ich habe mich mehrfach bemüht, den Polabstand des auf den Spiegel geklebten Magnets direct zu bestimmen. Versuche, bei denen als Hülfsmagnet ein Stäbchen von 10 mm Länge diente, führten auf $l=19,1$ und $18,6$ mm. Indessen zeigte eine Kritik dieser Versuche, dass einem Irrthum um $0,01$ mm in der kleineren Entfernung der Magnete schon ein Fehler von etwa $0,8$ mm im Polabstande entsprechen würde. Ich habe es daher vorgezogen, den Polabstand nach Hrn. F. Kohlrausch¹⁾ gleich $\frac{5}{6}$ der Magnetlänge zu setzen: $l = \frac{5}{6} \cdot 24,1 = 20,08$ mm, und ähnlich für das zweite Magnetometer $l = \frac{5}{6} \cdot 21,4 = 17,83$ mm.

Es bleibt noch der Einfluss zu untersuchen, welchen die Durchführung des Drahtes der Tangentenbussole durch die Marmorplatte auf den Reductionsfactor der Tangentenbussole ausübt. Die ganze Bewickelung kann angesehen werden als fünf vollständige Umgänge + einer Fläche, deren Projection auf die Windungsebene (und diese allein kommt in Betracht) ein Rechteck von $4,3$ mm Höhe und $6,8$ mm Breite ist, und zwar ist dies Rechteck in gleichem Sinne vom Strom umflossen zu denken wie die Windungen.

Die Wirkung des Rechteckes auf einen Magnetpol $+1$ im Centrum wird nahe genug sein:

$$- \frac{f \cdot 3}{a^3} \quad (f \text{ Fläche} = 29,2 \text{ qmm, } a \text{ Abstand} = 246,8 \text{ mm}),$$

während diejenige der fünf Windungen wesentlich durch $+10\pi 3/R$ dargestellt ist. Hiernach genügt es, in der Parenthese der Formel (11) noch $+fR/10\pi a^3$ hinzuzufügen. Uebrigens ist diese Correction so klein, dass sie hätte fortgelassen werden können.

Bei der Bestimmung des Torsionsverhältnisses machte sich die elastische Nachwirkung des Cocons bemerk-

1) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. Dec. 1883. p. 396.

lich, welche eine Unsicherheit von etwa 0,0₄2 herbeiführte, auch war die Feuchtigkeit der Luft von grossem Einfluss. Beobachtet wurde $\vartheta =$

| | | | | | |
|--------------|------|-----------|--------------|------|----------|
| 20. April | 1885 | 0,000 237 | 13. December | 1885 | 0,000265 |
| 31. Juni | 1885 | 262 | 20. " | 1885 | 212 |
| 20. October | 1885 | 260 | 31. " | 1885 | 200 |
| 10. November | 1885 | 280 | 7. Februar | 1886 | 218 |

Zur Rechnung benutzt ist für den Sommer 0,0₃237, Herbst 0,0₃267, Winter 0,0₃226. Für das zweite Magnetometer war $\vartheta = 0,0₃49$ im Mittel aus fünf Beobachtungen.

Aus obigen Angaben folgen die Coëfficienten der Formel (10):

Magnetometer I:

| | Sommer | Herbst | Winter |
|-------------|---------|---------|---------|
| A (für 10°) | 7,91823 | 7,91847 | 7,91814 |
| $\beta =$ | 0,00610 | | |

Magnetometer II:

| | |
|-------------|----------|
| A (für 10°) | 7,92230 |
| $\beta =$ | 0,00480. |

Für eine Temperatursteigerung um 1° beträgt der Zuwachs von A: 0,0₄2.

Die ersten im Juli und August 1885 unternommenen Versuche, den Localeinfluss des Magnetometers I zu bestimmen, ergaben denselben von der Grössenordnung 0,0₃2—3 im Sinne einer Verstärkung der Horizontalintensität.

Die Wirkung war nicht symmetrisch, vielmehr war dieselbe stärker, wenn von der Ausgangsstellung gegen den Uhrzeiger gedreht wurde.

Hieraus ging die Nothwendigkeit hervor, bei diesen Messungen als Ausgangsstellung diejenige zu wählen, in welcher die Lage des Gebäudes gegen den Spiegel genau die nämliche war, wie in der Ruhelage beim Gebrauch auf der Tangentenbussole.

Für die endgültigen Beobachtungen wurde daher folgendermassen verfahren.

Während das Magnetometer in der Tangentenbussole

stand, wurde auf dem Fussbrett desselben ein Spiegel befestigt und ein Hilfsfernrohr mit Scala so auf denselben gerichtet, dass der Scalenabstand dem des Beobachtungsfernrohrs vom Magnetometerspiegel gleich war, und der mittlere Scalentheil auf dem Fadenkreuz des Hilfsfernrohres erschien. Die Tangentenbussole wurde nun entfernt und das Magnetometer auf ein Tischchen mit nivellirter Glasplatte so gesetzt, dass es genau an der früheren Stelle sich befand. Um das Magnetometer bequem drehen zu können, wurden drei Glasstückchen so auf die Tischplatte gekittet, dass ihre etwas abgerundeten Flächen gegen drei Punkte des Umfanges des runden Fussbrettes drückten.

Jetzt war es leicht, die richtige Ausgangsstellung wieder zu finden und durch Drehen des Rahmens denselben gegen den Spiegel in dieselben Stellungen zu bringen, welche bei den Hauptbeobachtungen vorkamen.

Da hier der Aufhängungspunkt des Magnets an der Drehung theilnimmt, so müssen die beobachteten Ablenkungen noch vom Einflusse der Torsion befreit werden. Es wurde daher das Torsionsverhältniss unmittelbar nach jeder Beobachtungsreihe bestimmt.

Aus symmetrisch angeordneten Beobachtungen wurden die (schon von der Torsion befreiten) Ablenkungen erhalten:

| Hilfsfernrohr | 5 | 65 | 205 | 280 | 720 | 795 | 935 | 995 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 13. Dec. 1885 | -0,26 | -0,28 | -0,14 | -0,06 | -0,01 | — | -0,10 | -0,03 |
| 16. „ „ | -0,29 | -0,21 | -0,17 | -0,11 | — | +0,03 | — | +0,12 |
| 17. „ „ | -0,20 | -0,06 | -0,09 | -0,04 | +0,08 | +0,02 | +0,11 | +0,06 |
| 18. „ „ | -0,19 | -0,10 | -0,09 | -0,02 | +0,04 | +0,03 | -0,07 | -0,03 |
| Mittel | -0,24 | -0,16 | -0,12 | -0,06 | +0,04 | +0,03 | -0,01 | +0,03 |

Hier zeigt sich wieder deutlich die schon oben erwähnte Unsymmetrie; da indessen alle Beobachtungen mit beiderseitiger Ablenkung angestellt sind, so kann man aus den symmetrisch gelegenen Zahlen den „mittleren“ Localeinfluss (in Theilen der Horizontalintensität) berechnen. Derselbe wird¹⁾:

1) Die Rechnung ist mit 1 Decimale mehr geführt.

$$\begin{array}{rcl} 0,27 / 990 & = & 0,00027 \\ 0,15 / 870 & = & 17 \\ 0,15 / 690 & = & 25 \\ 0,10 / 440 & = & 21 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 0,27 / 990 & = & 0,00027 \\ 0,15 / 870 & = & 17 \\ 0,15 / 690 & = & 25 \\ 0,10 / 440 & = & 21 \end{array}} \right\} \text{Mittel } 0,00023.$$

Eine Messung vom 7. Febr. 1886 ergab:

$$\begin{array}{rcl} 0,24 / 982 & = & 0,00025 \\ 0,14 / 501 & = & 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 0,24 / 982 & = & 0,00025 \\ 0,14 / 501 & = & 27 \end{array}} \right\} \text{Mittel } 0,00026,$$

doch habe ich für die weiteren Reductionen den Werth 0,0₃23 verwendet.

Dass der Localeinfluss im Sinne einer Verstärkung der Horizontalintensität sich geltend macht, erscheint auffällig, da das fertige Gehäuse den Prüfungsmagnet in jeder Lage abstieß. Indessen rührt das paradoxe Verhalten wohl von dem Diamagnetismus der Vorsatzgläser her, welche den Magnet bei seiner Annäherung abstossen. Mit dieser Erklärung steht die Unsymmetrie der Wirkung im Einklang, denn infolge der gegen den Spiegel geneigten Stellung des Magnets kommt derselbe dem Glase bei einer Drehung des Gehäuses gegen den Uhrzeiger näher als bei der entgegengesetzten.

Das Magnetometer II übte einen magnetischen Local-einfluss ohne merkliche Unsymmetrie aus. Es wurde beobachtet:

| | 28. Jan. 1886 | 29. Jan. | 30. Jan. | 31. Jan. |
|-------------------------------|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| Drehung Scalentheile . . . | 970 | 980 | 498 | 506 |
| Ablenkung (von Tors. befreit) | 0,27 | 0,24 | 0,13 | 0,10 |
| Localeinfluss | 0,0 ₃ 28 | 0,0 ₃ 24 | 0,0 ₃ 27 | 0,0 ₃ 21 |
| Mittel | | 0,0 ₃ 25. | | |

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

III. Das electrodynamische Gesetz ein Punktgesetz; von W. G. Hankel.

(Aus den Berichten der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Ges. der Wiss., vom 23. April 1888; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Es ist bis jetzt das electrodynamische Gesetz als in seinem Wesen gänzlich verschieden von den Gesetzen der Schwere und der ruhenden Electricität aufgefasst worden. Man hat bei der Bestimmung der Einwirkung eines Stromelements auf ein anderes von Anfang an beide Elemente in die Rechnung aufgenommen. Im Folgenden werde ich nun zeigen, dass das electrodynamische Gesetz in gleicher Weise wie das Gesetz der Schwere und der ruhenden Electricität als ein sogenanntes Punktgesetz dargestellt werden kann.

Ein materieller Körper ändert den Zustand des ihn umgebenden physikalischen Raumes oder räumlichen Mittels in der Weise, dass ein zweiter an einen bestimmten Ort gebrachter Körper eine Anziehung zum ersteren, in deren Betrag dann der zweite Körper mit seiner Masse als Factor eingeht, erfährt. Bezeichnet m die Masse des ersten Körpers und r den Abstand des betrachteten Punktes, so wird die Aenderung des Zustandes in diesem Punkte durch m/r^2 ausgedrückt. In gleicher Weise kann man bei der Wirkung des Elementes ds' eines geschlossenen Stromes auf ein anderes Stromelement ds zunächst die Aenderung in dem Zustande des um ds' liegenden Raumes berechnen, und dann erst das Element ds an den betreffenden Ort legen. Ist ds' die Länge des Elementes, i' die Intensität des in ihm fließenden Stromes, r der Abstand des betrachteten Punktes von ds' , und θ' der Winkel, welchen r mit dem Element ds' bildet, so tritt in jenem Punkte eine mit $i' ds' \sin \theta' / r^2$ proportionale Aenderung ein. Wird nun das Element ds , dessen Intensität i ist, und welches mit der durch r und ds' gelegten Ebene einen Winkel ψ bilden möge, in den betreffenden Punkt gebracht, so tritt es mit dem Betrage von $i ds \cos \psi$ als Factor zu dem vorstehenden Ausdrucke hinzu. Es bleibt dann nur noch die Richtung zu bestimmen, nach welcher

der Antrieb zur Bewegung des Elementes ds erfolgt. Ich werde im Speciellen die physikalischen Vorgänge bei dieser Einwirkung nachweisen und aus denselben die Richtung der auftretenden Kraft herleiten.

Um eine klare Einsicht in die electrodynamischen Vorgänge zu erleichtern, halte ich es für zweckmässig, von der gewöhnlichen Form des Ampère'schen Gesetzes auszugehen.

§ 1. Geleitet von dem Bestreben, dem für die Wirkung in die Ferne aufgestellten Grundsatz, dass Wirkung und Gegenwirkung stets einander gleich und nur entgegengesetzt gerichtet sein sollen, zu genügen, gelangt Ampère¹⁾ in Betreff der Wirkung zweier Stromelemente ds und ds' mit den Stromintensitäten i und i' zu dem bekannten Gesetze:

$$- \frac{ii' ds ds'}{r^2} (\cos \varepsilon - \frac{1}{2} \cos \Theta \cos \Theta'),$$

worin r den Abstand der beiden Elemente, ε den Winkel zwischen den Richtungen von ds und ds' , Θ den Winkel zwischen r und ds und schliesslich Θ' den Winkel zwischen r und ds' bedeutet. Die Wirkung erfolgt in der Richtung der Verbindungslinie r , d. h. von ds' nach ds .

Als Ampère nach diesem Gesetze die Componenten der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Element berechnete²⁾, erschienen in den Integralen zwei Glieder, von denen bei Ausdehnung der Integration über den geschlossenen Stromlauf das eine wegfiel und also nur das andere übrig blieb.

§ 2. Im weiteren Verlaufe seiner Abhandlung kommt Ampère nochmals auf dieses Integral zurück³⁾ und berechnet aus dem nicht wegfallenden Theile die Wirkung zweier Elemente. Er findet für dieselbe den Werth

$$- \frac{ii' ds ds' \sin \Theta' \cos \psi}{2r^2},$$

1) Ampère, Théorie des phénomènes électrodynamiques. Paris 1826.

2) Ampère, l. c. p. 41 f.

3) Ampère, l. c. p. 135.

wo ψ den Winkel bedeutet, welchen das Element ds mit der durch r und das Element ds' gelegten Ebene bildet.

Auf kürzerem Wege erhält man dieses Gesetz, wenn man von dem durch Ampère¹⁾ aufgestellten Ausdruck

$$\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d^2\sqrt{r}}{ds ds'} ds ds'$$

ausgeht.

Es wird die Herleitung wesentlich erleichtern, wenn ich zuvor die im Folgenden gebrauchten Bezeichnungen, soweit sie nicht schon zuvor erläutert sind, und eine Reihe von auftretenden Ausdrücken zusammenstelle.

Es seien x, y, z die Coordinaten des Elementes ds ,
 x', y', z' die Coordinaten des Elementes ds' ,

also: $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$

a, b, c die Winkel, welche r mit den drei Coordinatenachsen,

α, β, γ die Winkel, die das Element ds mit denselben Axen und

α', β', γ' die Winkel, welche das Element ds' mit ihnen bildet.

Ferner wird:

$$\frac{dr}{ds} = \cos \Theta, \quad \frac{dr}{ds'} = -\cos \Theta',$$

$$\frac{dr}{dx} = \cos a, \quad \frac{dr}{dy} = \cos b, \quad \frac{dr}{dz} = \cos c,$$

$$r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'} = - \left(\frac{dx dx'}{ds ds'} + \frac{dy dy'}{ds ds'} + \frac{dz dz'}{ds ds'} \right) = -\cos \varepsilon,$$

$$r \frac{d^2 r}{dx ds'} + \frac{dr}{dx} \cdot \frac{dr}{ds'} = - \frac{dx'}{ds'} = -\cos \alpha', \quad \text{u. s. w.,}$$

$$\frac{d\sqrt{r}}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{dr}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \Theta,$$

$$\frac{d\sqrt{r}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{dr}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos a, \quad \text{u. s. w.,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sqrt{r}}{ds ds'} &= \frac{1}{2r\sqrt{r}} \left(r \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\ &= \frac{1}{2r\sqrt{r}} \left\{ -\cos \varepsilon + \frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta' \right\}, \end{aligned}$$

1) Ampère, l. c. p. 130.

$$\begin{aligned}\text{und} \quad \frac{d^2 V r}{dx ds} &= \frac{1}{2r V r} \left(r \frac{d^2 r}{dx ds} - \frac{1}{2} \frac{dr}{dx} \frac{dr}{ds} \right) \\ &= \frac{1}{2r V r} \left\{ -\cos \alpha' + \frac{3}{2} \cos \alpha \cos \Theta \right\}.\end{aligned}$$

Da die durch das Gesetz $(2ii'/\sqrt{r}) \cdot (d^2 V r / ds ds') ds ds'$ ausgedrückte Kraft in der Richtung von r liegt, so erhält man die Componenten nach den Coordinatenachsen durch Multiplication mit $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$. Es wird also

$$X = \frac{2ii'}{V r} \cdot \frac{d^2 V r}{ds ds'} ds ds' \cos a$$

$$\text{oder} \quad X = 4i ds i' ds' \frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d^2 V r}{ds ds'}.$$

Man hat aber identisch

$$\frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d^2 V r}{ds ds'} = \frac{d}{ds'} \left(\frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d V r}{ds} \right) - \frac{d V r}{ds} \cdot \frac{d^2 V r}{dx ds'}.$$

Addirt man auf beiden Seiten nochmals den Ausdruck:

$$\frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d^2 V r}{ds ds'}, \text{ so wird:}$$

$$2 \frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d^2 V r}{ds ds'} = \frac{d}{ds'} \left(\frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d V r}{ds} \right) + \frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d^2 V r}{ds ds'} - \frac{d V r}{ds} \cdot \frac{d^2 V r}{dx ds'}.$$

Hiernach erhält man

$$X = 2ii' ds ds' \left[\frac{d}{ds'} \left(\frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d V r}{ds} \right) + \frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d^2 V r}{ds ds'} - \frac{d V r}{ds} \cdot \frac{d^2 V r}{dx ds'} \right].$$

Wird über den geschlossenen Kreis, zu welchem das Element ds' gehört, integrirt, so fällt der erste Ausdruck weg, und es bleibt dann nur

$$X = 2ii' ds ds' \left(\frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d^2 V r}{ds ds'} - \frac{d V r}{ds} \cdot \frac{d^2 V r}{dx ds'} \right),$$

oder nach Einsetzung der oben angegebenen Werthe:

$$X = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \left\{ \cos a (-\cos \varepsilon + \frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta') - \cos \Theta (-\cos \alpha' + \frac{3}{2} \cos a \cos \Theta') \right\}.$$

$$X = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \left\{ -\cos \varepsilon \cos a + \cos \Theta \cos \alpha' \right\}^1.$$

1) Die Componente X geht, wie oben gezeigt, direct über in

$$X = 4i ds i' ds' \frac{d V r}{dx} \cdot \frac{d^2 V r}{ds ds'} \quad \text{oder:}$$

und dementsprechend:

$$Y = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{-\cos \varepsilon \cos b + \cos \Theta \cos \beta'\},$$

$$Z = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{-\cos \varepsilon \cos c + \cos \Theta \cos \gamma'\}.$$

Vereinigen wir die ersten und die zweiten Glieder gesondert zu einer Resultirenden, so erhalten wir zwei Kräfte,

$$X = 4i ds i' ds' \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{dVr}{dx} \cdot \frac{dVr}{ds} \right) - \frac{dVr}{ds} \cdot \frac{d^2 Vr}{dx ds} \right].$$

Bei der Integration über den geschlossenen Umlauf, zu welchem das Element ds' gehört, fällt das erste Glied des letzten Ausdruckes weg, und es bleibt übrig:

$$X' = \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(-\frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta' \cos a + \cos \Theta \cos a' \right), \quad \text{nebst}$$

$$Y' = \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(-\frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta' \cos b + \cos \Theta \cos \beta' \right) \quad \text{und}$$

$$Z' = \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(-\frac{3}{2} \cos \Theta \cos \Theta' \cos c + \cos \Theta \cos \gamma' \right),$$

wenn zur Unterscheidung die Componenten mit Accenten versehen werden.

Aus den obigen Gleichungen für X, Y, Z und X', Y', Z' ergeben sich sofort die Potentiale zweier geschlossener Ströme. Da nämlich $d(1/r)/dx = -1/r^2 \cdot \cos a$ und $d(1/r)/ds = -1/r^2 \cdot \cos \Theta$, so lassen sich die Gleichungen für die Componenten auch schreiben:

$$X = \frac{1}{2} ii' ds ds' \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{r} \cos \varepsilon - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos a' \right),$$

$$Y = \frac{1}{2} ii' ds ds' \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{r} \cos \varepsilon - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \beta' \right),$$

$$Z = \frac{1}{2} ii' ds ds' \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{r} \cos \varepsilon - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \gamma' \right),$$

und ebenso:
$$X' = ii' ds ds' \left(\frac{3}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} \cos \Theta \cos \Theta' - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos a' \right),$$

$$Y' = ii' ds ds' \left(\frac{3}{2} \frac{d}{dy} \frac{1}{r} \cos \Theta \cos \Theta' - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \beta' \right),$$

$$Z' = ii' ds ds' \left(\frac{3}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{r} \cos \Theta \cos \Theta' - \frac{d}{ds} \frac{1}{r} \cos \gamma' \right).$$

von denen die eine proportional $\cos \varepsilon$ in der entgegengesetzten Richtung von r , und die zweite proportional $\cos \Theta$ in der Richtung des Elementes ds' wirkt.¹⁾

Es ist nun

$$\begin{aligned}\cos \varepsilon &= \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' & \text{und} \\ \cos \Theta &= \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma.\end{aligned}$$

Die diesen beiden Ausdrücken proportionalen Kräfte sind

Bei der Integration über den geschlossenen Kreis, zu welchem das Element ds gehört, fallen die Glieder $d(1/r)/ds \cdot \cos \alpha'$, $d(1/r)/ds \cdot \cos \beta'$, $d(1/r)/ds \cdot \cos \gamma'$ weg, und es ergibt sich dann, wenn die Vorzeichen entgegengesetzt genommen werden, für den ersten Fall das Potential

$$P = -\frac{1}{2} i i' \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds',$$

und für den zweiten Fall:

$$P = -\frac{1}{2} i i' \iint \frac{\cos \Theta \cos \Theta'}{r} ds ds'.$$

1) Mein verehrter College, Hr. Prof. C. Neumann, sagt in der Vorrede p. VIII zu seinem Werke über die electrischen Kräfte I. Thl., 1873: „Diese Voraussetzungen führen, weil in ihnen die von Ampère selber gemachten Voraussetzungen mit enthalten sind, nothwendig zum Ampère'schen Gesetz; andererseits aber führen sie auch zu einer bestimmten Form des noch fehlenden Gesetzes, nämlich zu folgendem Ergebniss:

Die resultirende Form des electromotorischen Elementargesetzes. — Die electromotorische Kraft $E dt$, welche ein Stromelement $i' ds'$ in irgend einem Punkte m eines gegebenen Conductors während der Zeit dt hervorbringt, ist zerlegbar in zwei Kräfte:

$$-A^2 ds' \frac{d(r i' \cos \Theta')}{r^2} \text{ und } +A^2 ds' \frac{i' dr}{r^2},$$

erstere in der Richtung $r(ds' \rightarrow m)$, letztere gerechnet in der Richtung i' .“

Die Differentiation in diesen Ausdrücken bezieht sich auf die Zeit, von welcher die Lage der Elemente abhängt. Nimmt man i' constant und die Lage von ds' fest, sodass allein das in m befindliche Element ds mit t veränderlich ist, so erhält man für die vorstehenden Ausdrücke die Werthe:

$$-\frac{A^2 ds i' ds' \cos \varepsilon}{r^2} \text{ und } \frac{A^2 ds i' ds' \cos \Theta}{r^2}.$$

Setzt man die Constante $A^2 = \frac{1}{2} i$, so sind dies dieselben Ausdrücke, wie sie oben für die *ponderomotorische* Wirkung angegeben wurden, und die durch sie dargestellten Kräfte haben auch dieselbe Richtung wie oben.

zu einer Gesamttresultirenden zu vereinigen. Beide liegen in der Ebene (r, ds') und bilden miteinander den Winkel $(180^\circ - \Theta')$. Ihre Resultirende liegt daher ebenfalls in der Ebene (r, ds') .

§ 3. Wenn wir die Resultirende aus den drei Componenten X, Y, Z berechnen wollen, so geschieht dies am einfachsten auf folgendem Wege. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, kann man den Anfang der Coordinaten in das Element ds' und die Ebene XY so legen, dass das Element ds' in dieselbe fällt und die Axe X durch die Mitte des Elementes ds geht.

Dann wird $a = 0$, $b = c = 90^\circ$; $\beta' = 90^\circ - \alpha'$, $\gamma' = 90^\circ$. Man erhält also

$$X = - \frac{ii' ds ds'}{2r^3} \sin \alpha' \cos \beta$$

oder, da r mit der X -Axe zusammenfällt und also $\alpha' = \Theta'$:

$$X = - \frac{ii' ds ds'}{2r^3} \sin \Theta' \cos \beta, \quad Y = \frac{ii' ds ds'}{2r^3} \sin \Theta' \cos \alpha, \quad Z = 0.$$

Hieraus folgt für den Werth der Resultirenden, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\begin{aligned} R &= \frac{ii' ds ds'}{2r^3} \sin \Theta' \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} \\ &= \frac{ii' ds ds'}{2r^3} \sin \Theta' \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \\ &= \frac{ii' ds ds'}{2r^3} \sin \Theta' \sin \gamma. \end{aligned}$$

Es ist aber γ der Winkel zwischen ds und der Z -Axe; bezeichnet ψ den Winkel, welchen ds mit der Ebene XY oder (r, ds') macht, sodass $\psi = 90^\circ - \gamma$, so wird

$$R = \frac{ii' ds ds'}{2r^3} \sin \Theta' \cos \psi.$$

Da $(X/R) \cos \alpha + (Y/R) \cos \beta = 0$, so steht die Resultirende senkrecht auf dem Element ds , und da sie in der Ebene (r, ds') liegt, auch senkrecht auf der Projection des Elementes ds auf diese Ebene.

§ 4. Auch für eine beliebige Lage der Elemente ds' und ds lässt sich das vorstehende Gesetz in ähnlicher Weise herleiten.

Es ist in diesem Falle

$$\begin{aligned}\cos \varepsilon &= \cos a \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma', \\ \cos \Theta &= \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma, \\ \cos \Theta' &= \cos a \cos \alpha' + \cos b \cos \beta' + \cos c \cos \gamma' .\end{aligned}$$

Setzt man nun in die Gleichungen

$$\begin{aligned}X &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{ - \cos a \cos \varepsilon + \cos \Theta \cos \alpha' \}, \\ Y &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{ - \cos b \cos \varepsilon + \cos \Theta \cos \beta' \}, \\ Z &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{ - \cos c \cos \varepsilon + \cos \Theta \cos \gamma' \}\end{aligned}$$

die vorstehenden Werthe ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}X &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{ \cos \beta (- \cos a \cos \beta' + \cos b \cos \alpha') + \\ &\quad + \cos \gamma (- \cos a \cos \gamma' + \cos c \cos \alpha') \}, \\ Y &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{ \cos \gamma (- \cos b \cos \gamma' + \cos c \cos \beta') + \\ &\quad + \cos \alpha (- \cos b \cos \alpha' + \cos a \cos \beta') \}, \\ Z &= \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{ \cos \alpha (- \cos c \cos \alpha' + \cos a \cos \gamma') + \\ &\quad + \cos \beta (- \cos c \cos \beta' + \cos b \cos \gamma') \} .\end{aligned}$$

Schreibt man hier¹⁾

$$\begin{aligned}\cos c \cos \beta' - \cos b \cos \gamma' &= F \cos \lambda, \\ \cos a \cos \gamma' - \cos c \cos \alpha' &= F \cos \mu, \\ \cos b \cos \alpha' - \cos a \cos \beta' &= F \cos \nu,\end{aligned}$$

so sind λ, μ, ν die Winkel, welche eine auf der Ebene (r, ds') errichtete Normale mit den drei Axen macht. Werden nämlich die drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos a, \cos b, \cos c$ und ebenso mit $\cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma'$ multiplirt und addirt, so werden beide Summen = 0. Quadriert man die drei Gleichungen und addirt sie, so findet man den Werth $F^2 = \sin^2 \Theta'$.

Durch Einsetzung der Werthe von $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ und des Werthes $\sin \Theta' = F$ erhält man die drei Componenten:

$$X = \frac{ii' ds ds' \sin \Theta'}{2 r^2} (\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu),$$

1) Vgl. Ampère p. 137.

$$Y = \frac{ii' ds ds' \sin \Theta'}{2 r^2} (\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu).$$

$$Z = \frac{ii' ds ds' \sin \Theta'}{2 r^2} (\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda).$$

Werden diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ und ebenso mit $\cos \lambda$, $\cos \mu$ und $\cos \nu$ multiplicirt und addirt, so sind beide Summen = 0. Die Resultirende steht also senkrecht auf dem Element ds und auf der auf der Ebene (r, ds') errichteten Normale, folglich auch senkrecht auf der Projection von ds auf die genannte Ebene.

Ist ψ der Winkel zwischen ds und der Ebene (r, ds') , so erhält man ebenso wie in § 3 die Resultirende

$$R = \frac{ii' ds ds' \sin \Theta' \cos \psi}{2 r^2}.$$

§ 5. Anstatt die drei Componenten X , Y , Z zu der Resultirenden zu vereinigen, kann man dieselbe auch durch Zusammensetzung der beiden Kräfte $\cos \varepsilon$ und $\cos \Theta$, welche miteinander den Winkel $(180^\circ - \Theta')$ bilden, erhalten. Es wird dann die Resultirende:

$$R = \frac{ii' ds ds'}{2 r^2} \{\cos^2 \varepsilon + \cos^2 \Theta - 2 \cos \varepsilon \cos \Theta \cos \Theta'\}.$$

Es mögen in Fig. 1 die durch O , B , C gelegte Ebene die Ebene (r, ds') ; OD , OE und OF die Richtungen von resp. ds' , r und ds bezeichnen. Errichtet man nun auf der Ebene (r, ds') in O die Normale OA und legt durch OA und ds eine Ebene, so ist dieselbe senkrecht auf (r, ds') , und FG misst die Neigung ψ von ds gegen jene Ebene. Die Bogen DF , ED und EF messen resp. die Winkel ε , Θ' und Θ .

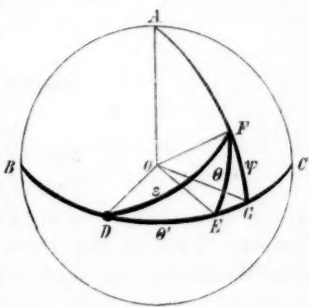


Fig. 1.

Der Quadrant AE steht ebenso wie AG senkrecht auf der Ebene (r, ds') ; der Bogen GE misst also den Winkel, welchen die Projection des Elementes ds auf die Ebene (r, ds') mit der Richtung von r macht.

Aus dem bei G rechtwinkligen Dreiecke FGE erhält man

$$\sin FEG : 1 = \sin \psi : \sin \Theta,$$

also

$$\cos FEG = \frac{\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi}{\sin^2 \Theta}.$$

Aus dem Dreiecke DFE folgt:

$$\cos \varepsilon = \cos \Theta \cos \Theta' - \sin \Theta \sin \Theta' \cos FEG,$$

$$\cos \varepsilon - \cos \Theta \cos \Theta' = -\sin \Theta' \sqrt{\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi},$$

$$\cos^2 \varepsilon - 2 \cos \varepsilon \cos \Theta \cos \Theta' + \cos^2 \Theta \cos^2 \Theta' = \sin^2 \Theta' (\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi).$$

Es wird also

$$\begin{aligned} R &= \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sqrt{\cos^2 \Theta - \cos^2 \Theta \cos^2 \Theta' + \sin^2 \Theta' (\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi)} \\ &= \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \cos \psi. \end{aligned}$$

In Figur 2 sei EE' die Richtung von r , OD die Richtung von ds' , so stellt in dem Parallelogramm $OE'HD$, OE' die Kraft $\cos \varepsilon$ und OD die Kraft $\cos \Theta$, sowie OH die Resultirende dar. Da der Winkel $DOE' = \Theta'$, so ist $DOE' = 180^\circ - \Theta'$. Aus dem Dreieck $E'OH$ erhält man

$$OH : E'H = \sin \Theta' : \sin E'OH, \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \cos \psi : \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \cos \Theta \\ = \sin \Theta' : \sin EOH, \end{aligned}$$

$$\text{folglich} \quad \sin EOH = \frac{\cos \Theta}{\cos \psi}.$$

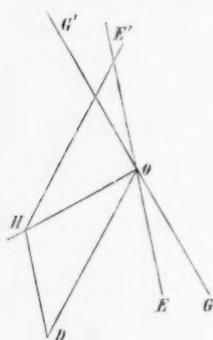


Fig. 2.

Der Bogen EG in Fig. 1 misst den Winkel zwischen OG [der Projection des Elementes ds auf die Ebene (r, ds')] und $OE[r]$. Für denselben ergibt sich aus dem Dreiecke GFE in Fig. 1 $\cos EOG = \cos \Theta / \cos \psi$, also derselbe Werth wie für $\sin E'OH$. Es ist daher $E'OH = 90^\circ + EOG$, oder $E'OH - EOG' = 90^\circ$. Die Resultirende R liegt also, da beide Kräfte $\cos \varepsilon$ und $\cos \Theta$ in der Ebene (r, ds') wirken, ebenfalls in dieser Ebene und steht auf der Projection von ds auf diese Ebene, mithin auch auf ds selbst senkrecht.

Die Seite des Elementes ds , nach welcher die Resulti-

rende gerichtet ist, lässt sich, ohne die Componenten zu berechnen, durch folgende Regel finden:

Man denke sich in die beiden Elemente zwei menschliche Figuren so gelegt, dass bei jeder derselben der elektrische Strom am Fusse ein und am Kopfe austritt, und wende beide Figuren so, dass jede derselben mit ihrer rechten Hand nach der anderen hingewandt ist, so wirkt die Resultirende nach der linken Seite der Figur, wenn beide das Gesicht nach derselben Seite gewandt haben, dagegen nach der rechten, wenn die Gesichter beider Figuren nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

§ 6. Betrachten wir zunächst die Wirkung eines geschlossenen Stromlaufes in dem Fig. 3 gezeichneten Kreise. Die Ebene dieses Kreisstromes liege in der XY -Ebene, und der Anfang des Coordinatensystems sei in O . Es liege ferner das Element ds mit seiner Mitte in der Axe X . Dann wird

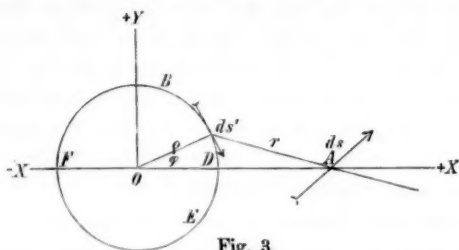


Fig. 3.

$c = 90^\circ$ und $\gamma' = 90^\circ$. In der Fig. 3 gezeichneten Anordnung sind die Winkel α und α' negativ. Man erhält dann:

$$X = -\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin(\alpha' - \alpha) \cos \beta = +\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \cos \beta,$$

$$Y = +\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin(\alpha' - \alpha) \cos \alpha = -\frac{ii' ds ds'}{2r^2} \sin \Theta' \cos \alpha,$$

$$Z = 0.$$

Da bei der Integration nach ds' die Grössen $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ constant sind, so handelt es sich nur um das Integral $Q = \frac{1}{2} i' f(ds'/r^2) \sin \Theta'$.

Ist der Halbmesser des Kreises ρ und φ der Winkel, welchen der nach ds' gezogene Halbmesser mit der Axe X

macht, so wird, wenn der Abstand OA des Elementes ds vom Mittelpunkte des Kreises $= c$ gesetzt wird:

$$r^2 = c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho \cos \varphi, \quad \text{und} \quad \sin \Theta' = \frac{c \cos \varphi - \varrho}{r},$$

folglich

$$Q = \frac{1}{2} i' \int \frac{(c \cos \varphi - \varrho) \varrho d\varphi}{(c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Für die beiden Elemente ds' , welche in den von A an den Kreis gezogenen Tangenten liegen, wird der Zähler des vorstehenden Bruches $= 0$; in dem zwischen diesen beiden Elementen dem A zunächst liegenden Theile des Kreises ist derselbe positiv, in dem anderen Theile dagegen negativ.

Setzt man $\cos \varphi = \mu$, so wird

$$Q = -\frac{1}{2} i' \varrho \int \frac{(c\mu - \varrho) d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2} (c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\mu)^{3/2}}.$$

In dieser Form treten in dem Integral noch zwei Unstetigkeiten für $\mu = +1$ und $\mu = -1$ auf, da für diese Stellen der Werth des Bruches unendlich wird. Es ist die Integration also von $\mu = +1$ bis $\mu = -1$, und dann wieder von $\mu = -1$ bis $\mu = +1$ auszuführen; dabei ist aber für die Integration auf der zweiten Hälfte des Kreises die Wurzel $\sqrt{1 - \mu^2}$, da dieselbe einen Sinus darstellt, welcher beim Uebergange aus dem zweiten in den dritten Quadranten sein Zeichen wechselt, negativ zu nehmen.

Hiernach wird dann

$$X = +ids \cos \beta \cdot Q, \quad Y = -ids \cos \alpha \cdot Q, \quad Z = 0,$$

und die Resultirende

$$R = ids \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} \cdot Q = ids \cos \psi \cdot Q.$$

Da in dem vorliegenden Falle die Wirkung aller Elemente ds' in derselben Ebene, senkrecht auf ds , theils nach der einen, theils nach der anderen Seite hin erfolgt, so hätte man auch sofort die Resultirende aus der Wirkung aller Elemente ds' berechnen können. Dieselbe wird

$$R = ids \cos \psi \int \frac{i' ds' \sin \Theta'}{2r^2} = ids \cos \psi \cdot Q,$$

also der zuvor berechnete Werth. Ihre Richtung bestimmt sich nach der früher aufgestellten Regel, wenn man beachtet,

dass die zunächst an ds liegenden Elemente wegen ihrer grösseren Nähe die stärkere Wirkung ausüben.

§ 7. Es ist ein eigenthümlicher Vorgang, dass, während anfangs die Beziehungen der Elemente ds' zu dem Element ds namentlich durch das Eintreten des $\cos \varepsilon$ eng verflochten scheinen, sich im Fortgange der Rechnung diese enge Beziehung wieder löst, und die Elemente ds' und das Element ds mit ihren Eigenschaften einfach als Factoren nebeneinander treten.

Man braucht bei der Berechnung der Wirkung des Kreisstromes auf das Element ds zunächst gar nicht auf das letztere Rücksicht zu nehmen, sondern nur den Ort desselben in Betracht zu ziehen. Man berechnet den Werth des Integrals Q ; dieser gibt für alle Punkte in der Ebene, welche sich im Abstände c (Fig. 3) vom Mittelpunkte des Kreises befinden, die daselbst durch den Strom hervorbrachte Veränderung an. Legen wir dann das Element ds an den betreffenden Ort, so entwickelt sich aus dem Einflusse jener Veränderung auf den in ihm vorhandenen Strom ein Antrieb zur Bewegung, welcher in der Ebene des Kreises und senkrecht gegen das Element ds auftritt. Die Grösse desselben erhält man, wenn man das Integral Q mit $ids \cos \varphi$ multiplicirt. Nach der früher angegebenen Regel bestimmt sich die Seite, nach welcher die Resultirende hingewandt ist.

§ 8. Es fragt sich nun, welches die physikalischen Veränderungen sind, welche der Kreisstrom in seiner Umgebung hervorbringt, und wie aus dieser Veränderung und den in dem Elemente vorhandenen Strome die zuletzt erwähnte Kraft entspringt.

In den Berichten der math.-phys. Classe der Sächs. Ges. vom Jahre 1865, p. 7 und 1866, p. 219¹⁾ habe ich eine Theorie der electrischen Erscheinungen aufgestellt, in welcher dieselben auf Schwingungen zurückgeführt werden, und gezeigt, wie die verschiedenen Vorgänge der Electrostatik, der Electrodynamik und der Induction sich auf diesem Wege

1) Vgl. auch W. G. Hankel, Pogg. Ann. 126, p. 440, 1865 u. 131. p. 607, 1867.

erklären lassen. Nach dieser Theorie bestehen die electrischen Ströme in kreisförmigen Schwingungen des Aethers, unter Betheiligung der materiellen Molecüle des Drahtes. Die kreisförmigen Schwingungen stehen senkrecht auf der Axe des Drahtes, und der Umschwung erfolgt je nach der Richtung des Stromes in dem einen oder dem anderen Sinne.

Von den Elementen ds' pflanzen sich dann die Schwingungen kugelförmig in den umgebenden Aether fort. Die Tangentialgeschwindigkeit auf den verschiedenen Punkten der Kugeloberfläche hängt ausser von der Stärke des Stromes und der Länge des Radius auch noch von seiner Lage gegen die Axe des Umschwunges ab, sodass dieselbe vom Aequator bis zu den Polen (Enden der Axe) hin mit dem Cosinus der Breite oder dem Sinus der Poldistanz abnimmt.

Bezeichnet i' die als Maass für die Stromstärke dienende Tangentialgeschwindigkeit im Aequator im Abstände 1, so ist die Tangentialgeschwindigkeit im Punkte D (Fig. 4)



Fig. 4.

$$\frac{i' \sin ABD}{r^2} = \frac{i' \sin \Theta'}{r^2}.$$

Wird nun in den Punkt D das Element ds mit der Stromstärke i gelegt, und zwar zunächst so, dass es in die durch ds' und $BD = r$ gelegte Ebene fällt, so haben

auf der einen Seite von ds die von ihm und von ds' ausgehenden Schwingungen dieselbe, auf der anderen aber entgegengesetzte Richtung. Die Geschwindigkeit der das Element ds umgebenden Aethertheilchen wird daher auf der ersten Seite vergrößert, auf der anderen vermindert. Dadurch entsteht, wie ich in der oben angeführten Abhandlung gezeigt habe, eine Kraft, welche in der Ebene (r, ds') liegt, senkrecht auf dem Element ds steht, und nach der Seite hin gerichtet ist, auf welcher durch das Zusammentreffen entgegengesetzter Bewegungen die Geschwindigkeit der Aethertheilchen vermindert ist. Die Grösse dieser Kraft ist

$$= \frac{i ds i' ds'}{r^2} \sin \Theta'.$$

Fällt das Element ds nicht in die Ebene (r, ds') , sondern bildet mit ihr den Winkel ψ , so haben wir die um ds als Axe erfolgenden Schwingungen in zwei zu zerlegen; die Axe des einen bildet die Projection von ds auf die Ebene (r, ds') , die Axe des anderen die auf dieser Ebene errichtete Normale. Die Stärke der um die Projection erfolgenden Schwingungen ist dann $ids \cos \psi$, und durch die Einwirkung des Stromes i' entsteht eine Kraft $ids \cos \psi (i' ds' \sin \Theta') / r^2$, welche in der Ebene (r, ds') liegt, senkrecht auf der Richtung der Projection oder auf dem Element ds steht, und nach der Seite hin gerichtet ist, auf welcher die von ds' und von der Projection ds ausgehenden Schwingungen entgegengesetzte Richtungen haben.

Gegen die um die Normale auf der Ebene (r, ds') erfolgenden Schwingungen verhalten sich die von ds' ausgehenden Schwingungen ringsum gleich, bringen also keine Ungleichheiten in den das Element ds umgebenden Aetherschwingungen hervor, und geben daher auch zum Auftreten einer dieses Element treibenden Kraft keine Veranlassung.

Die von einem Element ds' mit der Stromstärke i' auf ein anderes Element ds mit der Stromstärke i ausgeübte Kraft ist also

$$ids \cos \psi \cdot \frac{i' ds' \sin \Theta'}{r^2}.$$

Da die Kraft stets auf dem Elemente senkrecht steht, so hat die von ds' auf ds ausgeübte Wirkung im Allgemeinen eine andere Richtung, als die von ds auf ds' ausgeübte. Für diese beiden Wirkungen gilt also nicht der Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Dieses Princip selbst aber wird durch die Vorgänge zwischen den electrischen Elementen nicht verletzt. Die Wirkungen der Elemente aufeinander sind keine directen, sondern erst durch die Schwingungen vermittelt; in Betreff der Wirkungen der Aethertheilchen aufeinander behält jenes Princip seine Geltung.

§ 9. Wenden wir uns jetzt wieder zu der oben in § 6 berechneten Einwirkung eines ebenen Kreisstromes auf ein mit seiner Mitte in der Stromebene liegendes Element ds

zurück, so zeigt die Betrachtung der Entwicklung, dass das Integral Q die Resultirende aus den Geschwindigkeiten darstellt, welche von allen Elementen ds' an den Ort von ds übertragen werden. Diese Geschwindigkeiten sind senkrecht gegen die Ebene des Stromes gerichtet; die auf BDE (Fig. 3) gelegenen Theile des Kreises bringen nach dem Orte des Elementes ds die Geschwindigkeiten in der einen, die von dem anderen Theile BFE ausgehenden in entgegengesetzter Richtung. Das Integral Q stellt also die Resultirende aus allen diesen Geschwindigkeiten dar, welche nach der von BDE ausgehenden Drehungsrichtung senkrecht auf der Stromebene steht.

§ 10. Betrachten wir jetzt den allgemeinen in § 4 behandelten Fall der Wirkung eines beliebig gelegenen Elementes ds' auf ein Element ds , so wird sich auch hier zeigen, dass sich die Beziehungen der beiden Elemente so weit lösen, dass sie mit ihren Eigenschaften nur als Factoren zusammen-treten.

Die Gleichungen für die drei Componenten waren:

$$X = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{ \cos \beta (-\cos a \cos \beta' + \cos b \cos \alpha') + \cos \gamma (-\cos a \cos \gamma' + \cos c \cos \alpha') \},$$

$$Y = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{ \cos \gamma (-\cos b \cos \gamma' + \cos c \cos \beta') + \cos \alpha (-\cos b \cos \alpha' + \cos a \cos \beta') \},$$

$$Z = \frac{ii' ds ds'}{2r^2} \{ \cos \alpha (-\cos c \cos \alpha' + \cos a \cos \gamma') + \cos \beta (-\cos c \cos \beta' + \cos b \cos \gamma') \}.$$

Wir setzen nun

$$Q \cos \lambda = + \frac{i' ds'}{2r^2} (\cos c \cos \beta' - \cos b \cos \gamma'),$$

$$Q \cos \mu = + \frac{i' ds'}{2r^2} (\cos a \cos \gamma' - \cos c \cos \alpha'),$$

$$Q \cos \nu = + \frac{i' ds'}{2r^2} (\cos b \cos \alpha' - \cos a \cos \beta').$$

Die Werthe sind nur abhängig von ds' und der Lage des Ortes, an welchen später das Element ds hingesezt werden soll. Q bedeutet also eine Resultirende, deren Richtung

durch die Winkel λ, μ, ν bestimmt wird, und deren Grösse sich ergibt $Q = (i' ds' \sin \Theta')/r^2$. Dieser Ausdruck ist die von ds' an den betreffenden Ort übertragene Geschwindigkeit, da Q auf der Ebene (r, ds') senkrecht steht. Die obigen Ausdrücke $Q \cos \lambda, Q \cos \mu, Q \cos \nu$ bedeuten also die Componenten der Geschwindigkeit Q nach den drei Axen

Legen wir nun das Element ds , welches mit den drei Axen die Winkel α, β, γ bildet, an den betreffenden Ort, so erhalten wir die Componenten

$$X = ids Q (\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu),$$

$$Y = ids Q (\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu),$$

$$Z = ids Q (\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda).$$

Hieraus folgt, wenn ψ den Winkel zwischen ds und der Ebene (r, ds') bedeutet, die Resultirende

$$R = ids \cos \psi \cdot Q = \frac{ids \cos \psi \cdot i' ds' \sin \Theta'}{2 r^2}.$$

Diese Resultirende liegt in der Ebene (r, ds') und steht senkrecht auf ds oder seiner Projection auf die Ebene (r, ds') . Dies ist aber genau die Resultirende, welche entsteht, wenn das Element ids an den Ort gelegt wird, wo die resultirende Geschwindigkeit Q war. Es entsteht durch das Zusammentreffen der Schwingungen eine Kraft $ids \cos \psi (i' ds' \sin \Theta')/2 r^2$, welche das Element ds in der auf Q senkrechten Ebene, in der auf ds senkrechten Richtung, nach der Seite hin treibt, wo die von ds' und ds ausgehenden Schwingungen einander entgegengesetzt sind.

§ 11. Genau ebenso lässt sich die Aufgabe behandeln, die Wirkung eines beliebigen geschlossenen Stromes auf ein Element ds zu bestimmen. Auch hier lassen sich wieder in den Componenten X, Y, Z die auf ds und auf ds' bezüglichen Grössen trennen.

Setzen wir

$$Q_1 = \frac{1}{2} \int \frac{i' ds'}{r^2} (\cos c \cos \beta' - \cos b \cos \gamma') = Q \cos \lambda,$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \int \frac{i' ds'}{r^2} (\cos a \cos \gamma' - \cos c \cos \alpha') = Q \cos \mu,$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} \int \frac{i' ds'}{r^2} (\cos b \cos \alpha' - \cos a \cos \beta') = Q \cos \nu,$$

so ist Q die Resultirende, welche mit den drei Axen die Winkel λ, μ, ν macht. Dieselbe stellt die Resultirende der von allen Elementen ds' an den Ort von ds übertragenen Geschwindigkeiten dar, und Q_1, Q_2, Q_3 sind die drei Componenten dieser Resultirenden.

Bilden wir nun die Componenten X, Y, Z , so erhalten wir

$$\begin{aligned} X &= ids Q (\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu), \\ Y &= ids Q (\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu), \\ Z &= ids Q (\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda). \end{aligned}$$

Bezeichnet ψ den Winkel, welchen das Element ds mit einer auf Q senkrechten Ebene P macht, so wird die Resultirende

$$R = ids \cos \psi \cdot Q,$$

und zwar liegt dieselbe in der Ebene P und steht senkrecht auf der Projection von ds auf P und ebenso auf ds selbst.

Dies ist aber genau wieder der Vorgang, wie ihn die Schwingungstheorie fordert. Q ist die Resultirende aus den von sämtlichen Elementen ds' an den Ort des Elementes ds übertragenen Schwingungen. Legen wir nun das Element ids an den betreffenden Ort, so haben wir dasselbe auf eine gegen Q senkrechte Ebene P zu projiciren.¹⁾ In dieser Ebene

1) Die oben mit P bezeichnete Ebene hat schon Grassmann in seiner Abhandlung „Zur Electrodynamik“ (Journal für reine und angewandte Mathematik 83, 1887) bemerkt. Er sagt daselbst p. 63:

„Wenn ein beliebiger geschlossener Strom im Raume gegeben ist, so gibt es zu jedem Punkte A eine bestimmte Ebene, die man durch A gehend annehmen und die Wirkungsebene des Stromes in Bezug auf den Punkt A nennen kann, und welche die Eigenschaft hat, dass jedes von A ausgehende Stromelement (b) erstens, wenn es auf dieser Ebene senkrecht steht, keine Einwirkung durch den Strom erfährt, zweitens, wenn es schräg darauf steht, dieselbe Wirkung erleidet, wie seine (senkrechte) Projection (b_1) auf diese Ebene erleiden würde, drittens, dass die Kraft, die es erfährt, in dieser Ebene liegt und auf der Projection (b_1) des Stromelementes und also auch auf diesem selbst senkrecht steht, und viertens, dass wenn g die Kraft ist, welche jenes von A ausgehende Stromelement (b) in irgend einer Lage erfährt, und sich die Projection (b_1) des Stromelementes auf die Wirkungsebene um irgend einen Winkel in dieser Ebene dreht, dann auch die Kraft g , ohne ihren Werth zu verändern, sich um denselben Winkel dreht.“

entsteht dann durch das Zusammentreffen der von dem geschlossenen Strome und dem Elemente ds ausgehenden Schwingungen eine Kraft $ids \cos \psi \cdot Q$, welche auf ds und seiner Projection auf die Ebene P senkrecht steht und nach der Seite gerichtet ist, wo die von dem geschlossenen Strome und von ds ausgehenden Schwingungen entgegengesetzte Richtungen besitzen.

§ 12. Zum Schluss will ich noch den Fall behandeln, wo ein ebener kreisförmiger Strom auf ein Element, welches in seiner Axe in einem gegebenen Abstände liegt, einwirkt.

Wollte man diese Wirkung berechnen, indem man von der Formel

$$-\frac{ii' ds ds' \sin \theta' \cos \psi}{2r^2}$$

ausgeht, so würde, obwohl $\sin \theta' = 1$, selbst bei der Annahme, dass ds mit der Axe X parallel liegt, doch die Rechnung sehr umständlich werden, da die von jedem einzelnen Elemente ds' auf ds ausgeübte Kraft von Element zu Element ihre Grösse und Richtung ändert, wobei sie doch immer senkrecht gegen ds bleibt.

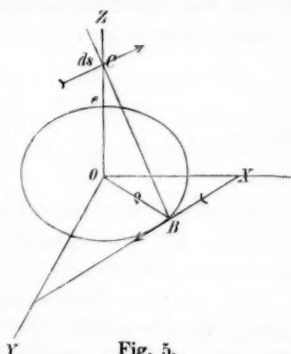


Fig. 5.

Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn man zuerst die Componenten X , Y , Z berechnet. Ziehen wir zuerst von allen Punkten des Kreises (Fig. 5) vom Halbmesser ρ Linien nach dem Orte C des Elementes ds , so bilden dieselben einen Kegel. Es sei e der Abstand OC , und c der Winkel, welchen eine Seite des Kegels mit der Axe macht, so ist der Winkel, welchen r bei allen Elementen ds' mit der Z -Axe bildet, $= c$. Ist der Winkel zwischen OB und X gleich φ , so ist der Winkel $\alpha' = 90^\circ + \varphi$, $\beta' = \varphi$, $\gamma' = 90^\circ$, es wird also:

$$\cos \alpha' = -\sin \varphi, \cos \beta' = \cos \varphi, \cos \gamma' = 0.$$

Weiter ergibt sich

$$\cos a = \sin c \cos \varphi, \cos b = \sin c \sin \varphi.$$

Das Integral Q_1 wird dann $+ \frac{i' q \cos c}{2 r^2} \int \cos q \, dq$.

$$Q_2 \quad \quad + \frac{i' q \cos c}{2 r^2} \int \sin q \, dq,$$

$$Q_3 \quad \quad + \frac{i' q \sin c}{2 r^2} \int dq.$$

Die beiden ersten Integrale geben zwischen 0 und 2π genommen den Werth = 0, Q_3 wird = $+ i' \pi q \sin c / r^2$. Die Resultirende $Q = Q_3$ liegt in der Axe Z.

Wird nun das Element an den Ort C gelegt, und sind die von den drei Axen gebildeten Winkel α, β, γ , so werden die drei Componenten

$$X = - \frac{id s i' \pi q \sin c \cos \beta}{r^2}, \quad Y = - \frac{id s i' \pi q \sin c \cos \alpha}{r^2}, \quad Z = 0.$$

also

$$R = \frac{id s i' \pi q \sin c \cos \psi}{r^2}.$$

Gehen wir von der Theorie der Schwingungen aus, so lässt sich das vorstehende Resultat fast aus der blossen Anschauung entnehmen.

Alle von den Elementen ds' an den Ort von ds übertragenen Geschwindigkeiten von der Grösse $i' ds' / r^2$ stehen senkrecht auf der durch C und ds' gelegten Ebene und sind einander gleich. Sie bilden mit der Axe Z einen Winkel = $90^\circ - c$. Zerlegen wir jede Geschwindigkeit $i' ds' / r^2$ in eine nach Z gerichtete und in eine mit der Ebene XY parallele Componente, so heben sich die letzteren Componenten auf, und es bleiben nur die nach Z hin gerichteten übrig, deren Summe mit Hinzufügung des Factors $\frac{1}{2}$ gleich $i' \pi q \sin c / r^2$ ist. Wird nun das Element ds an den Ort C gelegt, so entsteht eine in der auf Z senkrechten Ebene liegende und auf ds senkrecht stehende Kraft $ids \cos \psi \cdot i' \pi q \sin c / r^2$, und zwar gerichtet nach der Seite von ds , auf welcher die von dem kreisförmigen Strome und die von ds ausgehenden Schwingungen entgegengesetzt gerichtet sind.

Die vorstehenden Erörterungen dürften es wohl rechtfertigen, wenn ich der Ansicht Ausdruck gebe, dass die von mir aufgestellte Theorie den wirklichen Vorgängen entspricht. Die Rechnung stellt in allen Beziehungen vollständig und genau die aus den Schwingungen sich ergebenden Vorgänge dar.

IV. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Verdampfung und auf die Diffusion von Dämpfen¹⁾; von A. Winkelmann.

(Hierzu Taf. I Fig. 14.)

Ueber die Diffusion der Gase in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur liegen Versuche von Lohschmidt und in sehr ausführlicher Art von v. Obermayer vor. Aus den Loschmidt'schen Beobachtungen²⁾ ergeben sich für den Exponenten m der Gleichung:

$$D_{\vartheta} = D_0 (1 + \alpha \cdot \vartheta)^m,$$

in welcher D_{ϑ} den Diffusionscoefficienten bei ϑ^0 und α den Ausdehnungscoefficienten der Gase bezeichnet, folgende Werthe:

| Combination | m | Temperaturdiff., aus welcher m abgeleitet wurde |
|------------------|------|--|
| Kohlensäure-Luft | 1,98 | 38,0° |
| „ Wasserstoff | 2,10 | 13,2 |
| Sauerstoff - „ | 1,71 | 32,4 |

Die Versuche von v. Obermayer³⁾ umfassen das Temperaturintervall von 8 bis 61,5°. Die gefundenen Resultate, welche genauer als die Loschmidt'schen sind, enthält die folgende Tabelle.

1) Auszugsweise am 1. Juni 1888 in der med.-naturw. Gesellschaft in Jena mitgetheilt.

2) Loschmidt, Wien. Ber. **61**. 2. Abth. p. 367. 1870.

3) v. Obermayer, Wien. Ber. **81**. 2. Abth. p. 1102. 1880.

| | |
|------------------|--------------------|
| Kohlensäure-Luft | ^m 1,968 |
| " - Stickoxydul | 2,050 |
| " - Wasserstoff | 1,742 |
| Sauerstoff - " | 1,755 |
| " - Stickstoff | 1,792 |

Ich habe für eine grössere Reihe von Dämpfen, deren Diffusion in Wasserstoff, Luft und Kohlensäure früher untersucht wurde¹⁾, aus Mangel einer näheren Kenntniss vorausgesetzt, dass m unabhängig von der Natur des Gases sei, in welches die Diffusion stattfindet, und dass dasselbe gleich 2 sei. Eine Prüfung dieser Annahme war bei der damaligen Versuchsanordnung nicht möglich, weil die Genauigkeit der Versuche hierfür nicht ausreichte. Die Beobachtungen, welche am Wasserdampf angestellt waren, enthielten indess eine Andeutung dafür, dass die Abhängigkeit der Diffusionscoefficienten von der Temperatur mit der Natur des Gases, in welches die Diffusion stattfindet, sich ändert. Vergleicht man nämlich das Verhältniss der Diffusionscoefficienten bei verschiedenen Temperaturen miteinander, so finden sich keine constanten Zahlen. Es wurde gefunden:

| Combinationen | Verhältniss der Diffusionscoefficienten bei der Temperatur | |
|------------------------------------|---|-------|
| | 49,5° | 92,4° |
| H ₂ O — H ₂ | | |
| H ₂ O — CO ₂ | 5,52 | 4,95 |
| H ₂ O — Luft | | |
| H ₂ O — CO ₂ | 1,56 | 1,45 |

Das Verhältniss der Diffusionscoefficienten nimmt nach diesen Zahlen mit wachsender Temperatur ab. Diese Abnahme wird erklärt, wenn man annimmt, dass der Diffusionscoefficient H₂O—H₂ schwächer mit der Temperatur wächst, als jener von H₂—CO₂, und dass die Aenderung der Diffusionscoefficienten H₂O—Luft zwischen den Aenderungen der beiden anderen Combinationen gelegen ist.

In der folgenden Arbeit ist diese Annahme einer genaueren Prüfung unterzogen, und es hat sich in der That die Berechtigung derselben herausgestellt. Setzt man, wie oben, den Diffusionscoefficienten bei der Temperatur θ :

1) Winkelmann, Wied. Ann. 22. p. 152. 1884.

$$D_{\theta} = D_0 (1 + \alpha \cdot \theta)^m,$$

so wurde erhalten für die:

| Combination | m |
|----------------------------------|-------|
| H ₂ O-H ₂ | 1,712 |
| H ₂ O-Luft | 1,774 |
| H ₂ O-CO ₂ | 1,972 |

§ 1.

Die Versuche über die Diffusion des Wasserdampfes zeigten bei der früheren Untersuchung in der höheren Temperatur eine Schwierigkeit, welche darin bestand, dass mit der Aenderung des Abstandes des Flüssigkeitsniveaus vom Ende der Röhre der Diffusionscoefficient selbst sich änderte. Es wurde damals constatirt, dass der Diffusionscoefficient mit wachsendem Abstände einem Grenzwerthe zustrebt, und dass letzterer sich aus den Versuchen berechnen lässt.¹⁾ Für die jetzt auszuführende Bestimmung der Abhängigkeit des Diffusionscoefficienten von der Temperatur war es wünschenswerth, eine Anordnung zu treffen, bei welcher von vornherein der Grenzwert erreicht wird, bei welcher also die genannte Abhängigkeit des Diffusionscoefficienten nicht mehr vorhanden oder auf ein Minimum reducirt ist. Es war dies durch eine starke äussere Druckvermehrung, durch welche die Verdampfung sehr abgeschwächt wird, zu erzielen. Der Einfluss einer solchen Druckvermehrung ist durch eine vorbereitende Arbeit²⁾ festgestellt. Ein stärkerer äusserer Druck bietet gleichzeitig den Vortheil, dass höhere Temperaturen anwendbar werden, resp. dass die constante Temperatur der siedenden Dämpfe benutzt werden kann.

Die Anordnung der Versuche war folgende. Bei der tieferen Temperatur, welche wenig über der Temperatur des Zimmers lag, wurden die Apparate — deren Einrichtung vollständig mit jenen, die bei der Arbeit über den Einfluss des äusseren Druckes beschrieben sind, übereinstimmt — in ein Wasserbad gesetzt, dessen Temperatur durch einen Thermostaten bis auf 0,05° constant gehalten wurde. Die

1) Winkelmann, Wied. Ann. 22. p. 152. 1884.

2) Winkelmann, Wied. Ann. 33. p. 445. 1888.

Ablesung des Flüssigkeitsniveaus geschah mit Hülfe von Mikroskopen.

Zu den Versuchen, welche bei der höheren Temperatur ausgeführt wurden, diente ein viereckiger Kasten *AB* (Fig. 14) von 50 cm Höhe mit quadratischem Querschnitt von 9 cm Seite; die vordere und hintere Wand desselben war von Spiegelglasscheiben gebildet. Dieser Kasten wurde auf einen Wasserkessel gesetzt, um die Dämpfe durch den ersteren hindurchzuleiten. Da die Versuche längere Zeit beanspruchten, als dass der Wasserinhalt zur Dampfbildung ausgereicht hätte, war an dem Boden des Wasserkessels ein seitlich nach oben gebogenes Rohr herausgeführt, in welches aus einer Mariotte'schen Flasche *C* Wasser nachtropfte. In den Kasten *AB* wurden die Apparate *a*, *b*, deren Gesamtlänge 50 cm betrug, durch einen Kork bei *B* eingeführt. Die Verbindung der Apparate mit der Quecksilberluftpumpe geschah durch lange doppelt gebogene Glasröhren *ll*, welche nach Art der Kundt'schen Glasfedern eine starke Biegung vertrugen und die Verbindung mit der Pumpe sehr erleichterten; mit der letzteren war endlich einerseits ein Quecksilbermanometer *M* und andererseits eine Druckpumpe *P* verbunden. Der Druck, unter welchem die Verdampfung in den Apparaten erfolgte, lag zwischen 1500 und 1600 mm.

Zunächst wurde durch ein in den Kasten *AB* eingeführtes Thermometer, welches in $0,2^{\circ}$ getheilt war, constatirt, dass das Innere des Kastens trotz seiner beträchtlichen Höhe die Temperatur der siedenden Dämpfe, wie sie sich aus dem jeweiligen Barometerstand berechnet, in der That besass. Einige Schwierigkeit bot die mikroskopische Ablesung des Flüssigkeitsniveaus in den engen Röhren, weil häufig ein Beschlag an der inneren Wandung der Spiegelglasscheiben eintrat, welcher die scharfe Einstellung unmöglich machte. Es wurde in diesen Fällen durch ein Stückchen Wollenzeug, welches an einem Draht befestigt durch den Kork in den Kasten eingeführt war, der Beschlag unmittelbar vor der Ablesung abgewischt.

Die Absorption des diffundirenden Wasserdampfes wurde durch Schwefelsäure bewirkt, welche bis nahe an den Rand

des inneren Verdampfungsrohres reichte. Es war für die höhere Temperatur die Bestimmung nothwendig, ob etwa der Druck der Schwefelsäuredämpfe einen bemerkbaren Einfluss ausübte. Zu dem Ende wurde ein unten geschlossenes Glas theilweise mit Schwefelsäure gefüllt, dasselbe in einen gläsernen Siedeapparat eingeführt und mit der Quecksilberpumpe verbunden. Bei einem Luftdrucke von 1,5 mm war noch kein Sieden der Schwefelsäure bemerkbar; erst als der Druck 0,6 mm war, traten Blasen auf, welche als ein Sieden in der Nähe der Flüssigkeitsoberfläche gedeutet werden konnten, vielleicht aber auch blos Luft enthielten. Jedenfalls hat, wie aus diesen Versuchen hervorgeht, die von mir benutzte Schwefelsäure bei 100° einen Dampfdruck, welcher kleiner als 1,5 mm ist. Da aber die Versuche über die Verdampfung des Wassers unter einem Druck von 1500 bis 1600 mm angestellt wurden, hat der genannte kleine Druck keinen bemerkbaren Einfluss. Um aber in dieser Hinsicht noch eine weitere Controle zu haben, wurden auch Versuche ausgeführt, bei welchen die Schwefelsäure durch Phosphorsäureanhydrid ersetzt war; es zeigte sich hier das gleiche Resultat, wie früher unter Benutzung der Schwefelsäure.

§ 2. Versuchsergebnisse mit Luft.

Der Diffusionscoefficient ist dem folgenden Ausdruck, abgesehen von einem Temperaturcoefficienten, proportional:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(h_1 + h_0)(h_1 - h_0)} \cdot \log \frac{P}{P-p} = B.$$

Es bedeutet in demselben $(t_1 - t_0)$ die Zeit, welche nothwendig ist, damit das Flüssigkeitsniveau von dem Abstände h_0 auf h_1 sinkt; P stellt den äusseren Druck und p den Dampfdruck dar.

In der folgenden Tabelle sind die Grössen, welche zur Berechnung des obigen Ausdrucks B nothwendig sind, gleichzeitig mit dem Ausdruck selbst angegeben.

Tabelle I. Wasserdampf-Luft.

| Nr. | Abstand des Flüssigkeitsniveaus vom Ende d. Röhre in mm h | $(t_1 - t_0)$ in Sec. | Aeusserer Druck in mm P | Temperatur ϑ | Dampfdruck in mm p | B |
|-----|--|--------------------------|------------------------------|---------------------------|-------------------------|---------|
| 1 | 25,038 | 83 220 | 737,7 | 15,06 | 12,723 | 0,04179 |
| | 26,066 | 85 140 | | | | 0,04185 |
| | 27,079 | | | | | |
| 2 | 20,205 | 83 340 | " | " | " | 0,04137 |
| | 21,452 | 84 540 | | | | 0,04120 |
| | 22,645 | | | | | |
| 3 | 19,090 | 83 520 | " | " | " | 0,04170 |
| | 20,422 | 84 540 | | | | 0,04190 |
| | 21,696 | | | | | |
| 4 | 21,201 23,951 | 169 800 | 743,8 | 17,51 | 14,865 | 0,04169 |
| 5 | 17,165 20,508 | 169 560 | " | " | " | 0,04238 |
| 6 | 15,413 19,000 | 169 140 | " | " | " | 0,04162 |
| 7 | 13,806 17,755 | 169 560 | " | " | " | 0,04191 |
| 8 | 35,346 38,529 | 319 740 | 751,2 | 17,41 | 14,772 | 0,04262 |
| 9 | 45,546 48,052 | 319 860 | " | " | " | 0,04251 |
| 10 | 55,232 | 86 580 | 744,0 | 17,43 | 14,791 | 0,04228 |
| | 55,807 | 253 680 | | | | 0,04230 |
| | 57,459 | | | | | |
| 11 | 41,127 | 89 580 | " | " | " | 0,04240 |
| | 41,925 | 253 260 | | | | 0,04239 |
| | 44,102 | | | | | |
| 12 | 50,117 | 89 280 | " | " | " | 0,04255 |
| | 50,774 | 253 800 | | | | 0,04240 |
| | 52,591 | | | | | |

Die Versuche, welche gleichzeitig mit verschiedenen Röhren in demselben Wasserbade angestellt wurden, sind durch horizontale Doppelstriche eingeschlossen; sie sind dadurch charakterisirt, dass ihnen gleiche Drucke und gleiche Temperaturen angehören. Die Differenzen, welche diese Versuche in dem Ausdrucke B zeigen, sind grösser, als erwartet wurde; dieselben sind darin begründet, dass die Theilung auf der Glasröhre nicht gleichzeitig mit der Flüssigkeitskuppe

in dem Mikroskop deutlich sichtbar war. Um daher den Abstand der Kuppe von einem Theilstrich der Röhre durch das Ocularmikrometer des Mikroskops zu bestimmen, waren zwei Einstellungen nöthig, welche, wenn eine kleine Neigung der horizontalen Axe des Mikroskops infolge einer Schwerpunktsverschiebung des letzteren eintrat, von einem Fehler begleitet sind, der die Genauigkeit der mikroskopischen Ablesung nicht vollständig auszunutzen gestattet. Die beiden ersten Gruppen der obigen Tabelle zeigen Unterschiede, die fast 2 Proc. erreichen, während bei den letzten Gruppen, wo man durch häufigere Einstellungen die gedachten Fehler möglichst zu vermeiden bestrebt war, die Differenzen beträchtlich kleiner sind.

Die Verdampfungsröhren, welche zu den obigen Versuchen benutzt wurden, hatten einen lichten Durchmesser von 1,1 mm; um zu untersuchen, ob durch die Wasseraufnahme der absorbirenden Schwefelsäure die Wirksamkeit der letzteren bei den Versuchen beeinträchtigt wird, wurde ein Doppelversuch (Nr. 10 der Tab. I) ausgeführt, bei welchem das Verdampfungsrohr einen Durchmesser von 3,6 mm hatte. Obwohl hier etwa zehnmal so viel Wasser verdampft, als bei dem engen Rohr in gleicher Zeit, sind die Werthe von *B* sehr nahe einander gleich (vgl. die Nrn. 10, 11, 12), ein Beweis, dass die Schwefelsäure durch die geringe Wasseraufnahme, um welche es sich bei den obigen Versuchen handelt, auch nach längerer Zeit von ihrer Wirksamkeit noch nichts verloren hat.

Berechnet man aus den einzelnen Gruppen das Mittel, und fasst hierbei die beiden letzten Gruppen, welche nur einen Temperaturunterschied von 0,02° zeigen, zusammen, so erhält man:

| Temperatur | <i>B</i> |
|--------------|----------|
| 15,06 | 0,04164 |
| 17,51 | 0,04190 |
| 17,42 | 0,04232 |
| Mittel 16,66 | 0,04199 |

In der folgenden Tabelle sind die Versuche bei der höheren Temperatur zusammengestellt. Es wurden zwei Apparate gleichzeitig benutzt; dieselben sind durch die Buch-

staben *a* und *b* unterschieden; in dem Apparate *a* hatte das Verdampfungsrohr einen lichten Durchmesser von 1,11 mm. in dem Apparate *b* einen solchen von 0,88 mm.

Tabelle II. Wasserdampf-Luft.

| Nr. | Abstand des Flüssigkeitsniveaus vom Ende d. Röhre in mm <i>h</i> | (<i>t</i> ₁ - <i>t</i> ₀) in Sec. | Aeusserer Druck in mm <i>P</i> | Dampfdruck in mm <i>p</i> | Temperatur <i>θ</i> | <i>B</i> |
|----------------|---|---|-----------------------------------|------------------------------|------------------------|----------|
| 1 _a | 47,789 54,197 | 21240 | 1577,1 | 750,90 | 99,66 | 0,05485 |
| 1 _b | 46,338 52,686 | 20460 | " | " | " | 0,05473 |
| 2 _a | 54,944 63,296 | 32220 | 1569,5 | 747,75 | 99,55 | 0,05452 |
| 2 _b | 53,437 61,972 | 32580 | " | " | " | 0,05380 |
| 3 _a | 64,724 70,380 | 24630 | 1570,2 | 742,05 | 99,33 | 0,05562 |
| 3 _b | 63,535 68,253 | 20250 | " | " | " | 0,05521 |
| 4 _a | 143,135 146,141 | 27990 | 1576,0 | 743,5 | 99,39 | 0,05603 |
| 4 _b | 146,794 149,775 | 28950 | " | " | " | 0,05515 |
| 5 _a | 146,687 149,268 | 24600 | 1573,7 | 742,9 | 99,37 | 0,05598 |
| 5 _b | 150,276 152,718 | 24540 | " | " | " | 0,05435 |

In den Versuchen der vorstehenden Tabelle variirt der Abstand der Flüssigkeitsoberfläche vom Ende der Röhre von 47 bis 152 mm; trotzdem sind die Werthe von *B*, wie zu erwarten stand, nur wenig voneinander verschieden. Bildet man für beide Apparate das Mittel aus den Versuchen 1 bis 3 einerseits, und 4 bis 5 andererseits entsprechend den kleineren und grösseren Werthen von *h*, so findet man:

| | |
|------------------|-----------------------------|
| | Mittelwerthe von <i>B</i> ; |
| | Versuch 1-3; 4-5 |
| Apparat <i>a</i> | 0,05510 0,05600 |
| " <i>b</i> | 0,05458 0,05473 |

Bei dem Apparate *a* beträgt die Zunahme 1,6 Proc., bei dem Apparate *b* nur 0,3 Proc. Da es nicht wahrscheinlich ist, dass die Differenz in dem Verhalten beider Apparate nur in Ablesungsfehlern begründet sei, so liegt die Vermuthung nahe, dass eine der beiden Verdampfungsröhren nicht vollkommen cylindrisch ist. Wenn ein Rohr nach unten hin sich conisch verjüngt, so muss die Verdampfung mit wachsendem Abstände der Flüssigkeitsoberfläche grösser werden, als in einem cylindrischen Rohre, d. h. es muss *B* mit wachsendem Abstände wachsen. Um den Einfluss einer etwaigen Ungleichmässigkeit zu erkennen und aus dem Mittelwerthe zu beseitigen, wurden beide Rohre unten abgeschnitten und oben zugeschmolzen und dann die Verdampfung von neuem untersucht. Die folgende Tabelle enthält die Resultate.

Tabelle III. Wasserdampf-Luft.

(Beide Rohre sind umgekehrt.)

| Nr. | Abstand des Flüssigkeitsniveaus vom Ende d. Röhre in mm <i>h</i> | $(t_1 - t_0)$ in Sec. | Aeusserer Druck in mm <i>P</i> | Dampfdruck in mm <i>p</i> | Temperatur <i>θ</i> | <i>B</i> |
|--------|---|--------------------------|-----------------------------------|------------------------------|------------------------|----------|
| 6_a | 65,662 70,042 | 20220 | 1562,5 | 730,4 | 98,90 | 0,05449 |
| 6_b | 67,141 71,423 | 19650 | " | " | " | 0,05515 |
| 7_a | 72,352 77,946 | 27340 | 1560,4 | 732,8 | 98,99 | 0,05553 |
| 7_b | 73,696 79,310 | 28320 | " | " | " | 0,05506 |
| 8_a | 136,194 139,194 | 27720 | 1568,7 | 735,7 | 99,10 | 0,05420 |
| 8_b | 129,549 132,854 | 29220 | " | " | " | 0,05396 |
| 9_a | 140,113 142,924 | 25860 | 1568,6 | 744,5 | 99,43 | 0,05504 |
| 9_b | 133,803 136,890 | 27030 | " | " | " | 0,05530 |
| 10_a | 89,733 94,215 | 27270 | 1575,3 | 742,9 | 99,37 | 0,05452 |
| 10_b | 64,295 70,312 | 27090 | " | " | " | 0,05392 |

Bildet man hier ebenfalls das Mittel aus den Versuchen mit kleinem Abstand und jenen mit grösserem Abstand, so ergibt sich:

| | Mittelwerthe von B aus den Versuchen | |
|-------------|---|---------|
| | Nr. 6, 7, 10; | 8, 9 |
| Apparat a | 0,05485 | 0,05462 |
| „ b | 0,05471 | 0,05463 |

Nach diesen Versuchen findet sich also eine kleine Abnahme von B mit wachsendem Abstände h ; es würde dies der Annahme einer schwachen Verjüngung des Rohres nach oben hin entsprechen und in Uebereinstimmung mit der geringen Zunahme in umgekehrter Stellung sein. Nach diesen letzteren Versuchen ist die Aenderung aber so klein, dass sie auch durch Versuchsfehler vollständig erklärt werden kann. Man darf daher aus der Gesammtheit der Versuche der Tabellen II und III den Schluss ziehen, dass die Aenderung des Diffusionscoefficienten mit wachsendem Abstände der Flüssigkeitsoberfläche vom Ende der Verdampfungsröhre bei den vorliegenden Versuchen sehr gering und nicht sicher nachweisbar ist. Infolge dessen sind die Grenzwerte, welche bei schwächerem äusseren Druck nach einer früheren Untersuchung erst durch Rechnung gefunden werden mussten, hier unmittelbar experimentell bestimmbar.

Das Mittel aus sämmtlichen Versuchen ist:

$$B = 0,05487 \text{ für } \vartheta = 99,31^\circ.$$

Aus diesen Werthen erhält man den Diffusionscoefficienten bei der Temperatur ϑ des Versuches, bezogen auf cm und Sec., nach der Formel:

$$D_\vartheta = \frac{s}{d_1} \cdot \frac{273 + \vartheta}{273} \cdot B \cdot \log e \cdot 10^{-2}.$$

Es bezeichnet hier s die Dichtigkeit des Wassers bei ϑ° , bezogen auf Luft von 0° und 76 cm Druck als Einheit; d_1 die normale Dichte des Dampfes, ebenfalls bezogen auf Luft von 0° und 76 cm Druck als Einheit. Es wurde gesetzt:

$$\begin{aligned} \text{bei } 16,66^\circ \quad \frac{s}{d_1} &= \frac{999}{1,293 \cdot 0,623} \\ \text{bei } 99,3^\circ \quad \frac{s}{d_1} &= \frac{959}{1,293 \cdot 0,643} \end{aligned}$$

Hiermit findet man für die Diffusionscoëfficienten Wasserdampf-Luft:

$$\text{bei } 16,66^{\circ} \quad D_{16,66} = 0,2402,$$

$$\text{bei } 99,31^{\circ} \quad D_{99,31} = 0,3749,$$

und hieraus für den Exponenten m der Gleichung:

$$D_{\theta} = D_0 \left(\frac{273 + \theta}{273} \right)^m$$

$$m = 1,774; \quad D_0 = 0,2162.$$

Eine Vergleichung mit den drei Mittelwerthen der Tabelle I zeigt folgende Zusammenstellung:

| Temp. | Mittlerer Abstand h | Diffusionscoëfficienten beob. | berechn. | Differenz |
|-------|-----------------------|-------------------------------|----------|-----------|
| 15,06 | 22,7 | 0,2381 | 0,2378 | + 0,0003 |
| 17,51 | 18,6 | 0,2397 | 0,2413 | - 0,0016 |
| 17,42 | 47,4 | 0,2425 | 0,2412 | + 0,0013 |

Reducirt man die beobachteten Werthe auf die gleiche Temperatur $17,42^{\circ}$, so erhält man:

| | Mittlerer Abstand h | Diffusionscoëfficient | Zunahme pro mm in Proc. |
|----|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| 1. | 22,7 | 0,2415 | |
| 2. | 18,6 | 0,2396 | 0,017 |
| 3. | 47,4 | 0,2425 | 0,041 |

Der Diffusionscoëfficient wächst nach diesen Zahlen mit wachsendem Abstände; indessen ist diese Zunahme sehr gering. Berechnet man dieselbe aus der ersten und dritten, dann aus der zweiten und dritten Gruppe, so findet man die in der letzten Reihe angegebenen Werthe. Schon der grosse Unterschied von 0,017 und 0,041 Proc. zeigt, dass die Genauigkeit der Beobachtungen nicht ausreicht, um die Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten von dem Abstände genau zu bestimmen. Es bietet eine solche Bestimmung aber auch wegen der sehr geringen Grösse kein besonderes Interesse; man darf annehmen, dass der schliessliche Grenzwert in den obigen Resultaten schon sehr nahe erreicht ist.

§ 3. Versuchsergebnisse mit Wasserstoff.

Da die Apparate, welche mit der Quecksilber- und Druckpumpe verbunden waren, das der Verdampfung zu unterwerfende Wasser enthielten, konnten die ersteren nicht

vollständig leer gepumpt werden; der Druck durfte, wenn ein Sieden des Wassers vermieden werden sollte, nur bis nahe an den Druck der Wasserdämpfe für die jeweilige Zimmertemperatur heruntergeführt werden. Es war daher eine oftmalige Wiederholung der theilweisen Entleerung (bis etwa 20 mm Druck) erforderlich, um die Apparate mit möglichst reinem Gase zu füllen. Der Wasserstoff wurde aus Zink und verdünnter Schwefelsäure dargestellt und durch eine Flasche mit doppeltchromsaurem Kali gewaschen.

In der folgenden Tabelle sind die Versuche, welche bei der niedrigen Temperatur ausgeführt wurden, wiedergegeben.

Tabelle IV. Wasserdampf-Wasserstoff.

| Nr. | Abstand des Flüssigkeitsniveaus vom Ende d. Röhre in mm h | $(t_1 - t_0)$ in Sec. | Aeusserer Druck in mm P | Temperatur θ | Dampfdruck in mm p | B |
|----------------|--|--------------------------|------------------------------|------------------------|-------------------------|--------|
| 1 _a | 37,736 | 81900 | 735,3 | 19,90 | 17,256 | 0,1473 |
| 1 _b | 40,301 43,760 | 80100 | 736,0 | 19,94 | 17,300 | 0,1463 |
| 2 _a | 37,543 | 81900 | 735,3 | 19,90 | 17,256 | 0,1468 |
| 2 _b | 40,710 43,572 | 80100 | 736,0 | 19,94 | 17,300 | 0,1471 |
| 3 _a | 39,507 | 81900 | 735,3 | 19,90 | 17,256 | 0,1470 |
| 3 _b | 42,534 45,296 | 80100 | 736,0 | 19,94 | 17,300 | 0,1466 |
| 4 _a | 38,405 | 81900 | 735,3 | 19,90 | 17,256 | 0,1480 |
| 4 _b | 41,531 44,352 | 80100 | 736,0 | 19,94 | 17,300 | 0,1464 |
| 5 _a | 44,786 | 76860 | 731,2 | 19,96 | 17,321 | 0,1465 |
| 5 _b | 47,855 50,074 | 85680 | 732,3 | 20,00 | 17,363 | 0,1483 |
| 6 _a | 44,598 | 76860 | 731,2 | 19,96 | 17,321 | 0,1450 |
| 6 _b | 47,126 49,780 | 85680 | 732,3 | 20,00 | 17,363 | 0,1440 |
| 7 _a | 46,293 | 76860 | 731,2 | 19,96 | 17,321 | 0,1465 |
| 7 _b | 48,760 51,381 | 85680 | 732,3 | 20,00 | 17,363 | 0,1468 |
| 8 _a | 45,375 | 76860 | 731,2 | 19,96 | 17,321 | 0,1482 |
| 8 _b | 47,912 50,543 | 85680 | 732,3 | 20,00 | 17,363 | 0,1451 |

Wie aus der vorstehenden Tabelle ersichtlich, geht der Abstand des Flüssigkeitsniveaus vom Ende der Röhre nicht unter 37 mm; es geschah dies deshalb, weil nach den früheren Versuchen¹⁾ der Wasserstoff auch bei der Temperatur 49,5° eine schwache Aenderung des Diffusionscoëfficienten mit wachsendem Abstände der Flüssigkeitsoberfläche vom Ende der Röhre gezeigt hatte.

Die Versuche der Tabelle IV, welche sich auf dieselbe Temperatur und denselben Druck beziehen, wurden gleichzeitig angestellt. Fasst man die erste und die letzte Gruppe der Versuche zusammen, so erhält man für *B* folgende Mittelwerthe:

| Temperatur | <i>B</i> |
|------------|----------|
| 19,92 | 0,1469 |
| 19,98 | 0,1463 |

das Gesamtmittel ist daher:

| | |
|-------|---------|
| 19,95 | 0,1466. |
|-------|---------|

Die Versuche bei der höheren Temperatur in der Nähe von 100° sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Tabelle V. Wasserdampf-Wasserstoff.

| Nr. | Abstand des Flüssigkeitsniveaus vom Ende d. Röhre in mm <i>h</i> | (<i>t</i> ₁ - <i>t</i> ₀) in Sec. | Aeusserer Druck in mm <i>P</i> | Dampfdruck in mm <i>p</i> | Temperatur <i>θ</i> | <i>B</i> |
|----------------|---|---|-----------------------------------|------------------------------|------------------------|----------|
| 1 _a | 52,634 54,903 | 2810 | 1525,2 | 739,5 | 99,24 | 0,1893 |
| 1 _b | 56,370 58,472 | 2250 | " | " | " | 0,1862 |
| 2 _a | 56,956 61,076 | 4270 | 1453,4 | 739,5 | 99,24 | 0,1844 |
| 2 _b | 60,267 64,208 | 4250 | " | " | " | 0,1870 |
| 3 _a | 67,414 71,692 | 5900 | 1616,9 | 741,5 | 99,31 | 0,1892 |
| 3 _b | 70,590 74,722 | 5910 | " | " | " | 0,1906 |

1) Winkelmann, Wied. Ann. 22. p. 157. 1884.

(Fortsetzung von Tab. V.)

| Nr. | Abstand des Flüssigkeits- niveaus vom Ende d. Röhre in mm <i>h</i> | (<i>t</i> ₁ - <i>t</i> ₀) in Sec. | Aeusserer Druck in mm <i>P</i> | Dampf- druck in mm <i>p</i> | Tempera- tur <i>θ</i> | <i>B</i> |
|----------------|---|--|---|--------------------------------------|-----------------------------|----------|
| 4 _a | 72,795 80,120 | 11400 | 1622,1 | 741,7 | 99,32 | 0,1851 |
| 4 _b | 75,971 83,150 | 11350 | " | " | " | 0,1896 |
| 5 _a | 85,877 92,589 | 12000 | 1605,2 | 743,7 | 99,40 | 0,1874 |
| 5 _b | 88,795 95,428 | 11950 | " | " | " | 0,1891 |
| 6 _a | 121,859 128,243 | 16430 | 1615,4 | 748,4 | 99,57 | 0,1863 |
| 6 _b | 113,578 120,442 | 16460 | " | " | " | 0,1862 |

Die Versuchsnummern mit dem Index *a* beziehen sich ebenso, wie bei den Versuchen mit Luft, auf die weitere Röhre. Vergleicht man die obigen Werthe von *B* für die verschiedenen Abstände *h*, so ist eine Abhängigkeit hiervon nicht zu erkennen; der im § 1 besprochene Grenzwert ist also auch bei der Combination Wasserdampf-Wasserstoff bereits erreicht. — Das Mittel sämmtlicher Versuche ist:

$$\text{Temperatur } 99,34 \quad B = 0,1870.$$

Die beiden Werthe von *B* liefern für den Diffusionscoefficienten:

$$D_{19,95} = 0,8482; \quad D_{19,34} = 1,277.$$

Aus diesen Versuchen erhält man nach der Formel:

$$D_{\theta} = D_0 \left(\frac{273 + \theta}{273} \right)^m,$$

$$D_0 = 0,7516 \quad \text{und} \quad m = 1,712.$$

§ 4. Versuchsergebnisse mit Kohlensäure.

Die Versuchsergebnisse bei der niedrigen Temperatur gibt die folgende Tabelle.

Tabelle VI. Wasserdampf-Kohlensäure.

| Nr. | Abstand des Flüssigkeitsniveaus vom Ende d. Röhre in mm <i>h</i> | $(t_1 - t_0)$ in Sec. | Aeusserer Druck in mm <i>P</i> | Temperatur <i>θ</i> | Dampfdruck in mm <i>p</i> | <i>B</i> |
|-----|---|-----------------------|-----------------------------------|------------------------|------------------------------|----------|
| 1 | 19,352 | 81 060 | 743,9 | 20,73 | 18,162 | 0,02741 |
| | 20,548 | 173 160 | 739,9 | " | " | 0,02754 |
| | 29,915 | | | | | |
| 2 | 20,176 | 173 160 | 739,9 | " | " | 0,02745 |
| | 22,575 | 89 340 | 735,8 | " | " | 0,02758 |
| | 23,730 | | | | | |
| 3 | 20,414 | 80 880 | 743,9 | " | " | 0,02770 |
| | 21,560 | 173 160 | 739,9 | " | " | 0,02792 |
| | 23,853 | | | | | |
| 4 | 25,648 | 82 380 | 741,1 | 20,73 | 18,162 | 0,02782 |
| | 26,592 | 318 660 | 737,0 | 20,75 | 18,175 | 0,02780 |
| | 29,988 | | | | | |
| 5 | 25,355 | 82 380 | 741,1 | 20,73 | 18,162 | 0,02795 |
| | 26,314 | 318 660 | 737,0 | 20,75 | 18,175 | 0,02764 |
| | 29,722 | | | | | |
| 6 | 26,507 | 82 380 | 741,1 | 20,73 | 18,162 | 0,02772 |
| | 27,419 | 318 660 | 737,0 | 20,75 | 18,175 | 0,02776 |
| | 30,719 | | | | | |

Das Mittel sämmtlicher Versuche liefert für *B*:

Temperatur 20,74 $B = 0,02767$.

Die Versuche, welche unter derselben Nummer stehen, sind mit der gleichen Kohlensäurefüllung vorgenommen. Wurden mehr als zwei Versuche mit der gleichen Füllung ausgeführt, so lieferten die letzten Versuche grössere Werthe für *B*. Es ist möglich, dass durch Diffusion der Kohlensäure durch die Fettschichten der Hähne und Gummipfropfen ein theilweiser Ersatz der Kohlensäure durch Luft eintritt und hierdurch das Wachsen der Werthe von *B* bedingt ist; liess man den Apparat im übrigen unverändert, füllte denselben aber mit neuer Kohlensäure, so traten auch die früheren Werthe wieder auf. Eine Vergleichung der Werthe von *B* in der obigen Tabelle zeigt auch, dass häufig der zweite Werth der grössere ist. Da der aus den obigen Versuchen abgeleitete Werth eine grössere Differenz gegen ältere Beobachtungen zeigt (vgl. § 5), so wurden nochmals

einige Versuchsreihen ausgeführt und hierbei nach jedem Versuche eine neue Füllung mit Kohlensäure vorgenommen. Im Folgenden sind die Resultate in abgekürzter Form wiedergegeben.

Tabelle VII. Wasserdampf-Kohlensäure.

| Nr. | Mittlerer Abstand in mm <i>h</i> | <i>B</i> | Nr. | Mittlerer Abstand in mm <i>h</i> | <i>B</i> |
|-----|--|----------|-----|--|----------|
| 7 | 30,90 | 0,02756 | 15 | 29,42 | 0,02803 |
| 8 | 28,70 | 808 | 16 | 38,48 | 818 |
| 9 | 25,23 | 793 | 17 | 36,79 | 809 |
| 10 | 32,24 | 794 | 18 | 35,54 | 762 |
| 11 | 28,66 | 814 | 19 | 34,06 | 765 |
| 12 | 26,87 | 800 | 20 | 16,10 | 810 |
| 13 | 34,41 | 817 | 21 | 14,04 | 740 |
| 14 | 31,10 | 832 | 22 | 20,06 | 791 |

Die Temperatur bei den Versuchen Nr. 7 bis 19 incl. war 24,74, bei den drei letzten Versuchen resp. 24,56; 24,74; 24,80.

Das Mittel dieser Versuche ist:

Temperatur 24,73 *B* 0,02795.

Das Mittel aus sämtlichen 28 Versuchen ist:

Temperatur 22,95 *B* 0,02783.

Die folgende Zusammenstellung enthält die Versuche bei der höheren Temperatur.

Tabelle VIII. Wasserdampf-Kohlensäure.

| Nr. | Abstand des Flüssigkeits- niveaus vom Ende d. Röhre in mm <i>h</i> | (<i>t</i> ₁ - <i>t</i> ₀) in Sec. | Aeusserer Druck in mm <i>P</i> | Dampf- druck in mm <i>p</i> | Tempera- tur <i>θ</i> | <i>B</i> |
|----------------|---|--|---|--------------------------------------|-----------------------------|----------|
| 1 _a | 43,208 45,633 | 11010 | 1637,8 | 744,5 | 99,43 | 0,03718 |
| 1 _b | 35,106 38,267 | 11880 | " | " | " | 0,03708 |
| 2 _a | 47,590 52,223 | 23340 | 1641,4 | 743,8 | 99,40 | 0,03780 |
| 2 _b | 41,062 46,018 | 21840 | " | " | " | 0,03770 |

(Fortsetzung von Tab. VIII.)

| Nr. | Abstand des Flüssigkeitsniveaus vom Ende d. Röhre in mm h | $(t_1 - t_0)$ in Sec. | Aeusserer Druck in mm P | Dampfdruck in mm p | Temperatur ϑ | B |
|-------|--|--------------------------|---------------------------------|----------------------------|---------------------------|---------|
| 3_a | 53,255 56,125 | 16050 | 1656,7 | 738,7 | 99,21 | 0,03813 |
| 3_b | 47,428 50,560 | 16050 | " | " | " | 0,03729 |
| 4_a | 39,305 43,686 | 18440 | 1627,5 | 744,7 | 99,43 | 0,03714 |
| 4_b | 37,428 42,150 | 18990 | " | " | " | 0,03727 |
| 5_a | 43,686 45,763 | 9420 | 1628,7 | 744,3 | 99,42 | 0,03716 |
| 5_b | 42,150 44,208 | 8880 | " | " | " | 0,03777 |

Der Mittelwerth ist:

Temperatur 99,38 B 0,03745.

Mit Hülfe dieser Werthe findet man die Diffusionscoefficienten:

$$D_{22,95} = 0,1626; \quad D_{99,38} = 0,2559$$

und damit:

$$D_0 = 0,1387 \quad m = 1,972.$$

Vergleicht man die Beobachtungen bei den Temperaturen 20,74 und 24,73 mit den durch Rechnung gefundenen Werthen, so erhält man:

| Temp. | beob. | berech. | Diff. |
|-------|--------|---------|---------|
| 20,74 | 0,1605 | 0,1602 | - 0,033 |
| 24,73 | 0,1645 | 0,1643 | + 0,032 |

§ 5. Vergleichung der Versuchsergebnisse mit älteren Beobachtungen. Schlussbemerkungen.

Im Jahre 1884 wurden die Beobachtungen über die Verdampfung von Wasser in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure bei den Temperaturen 49,5° und 92,4° angestellt.¹⁾ Eine Vergleichung dieser Werthe mit den jetzt für die gleiche

1) Winkelmann, Wied. Ann. 22. p. 158. 1884.

Temperatur zu berechnenden gibt folgende Zusammenstellung:

Diffusionscoefficient.

| Temp. | Wasserdampf-Luft | | | Wasserdampf-Wasserstoff | | | Wasserdampf-Kohlensäure | | |
|-------|------------------|--------|-----------------------|-------------------------|-------|-----------------------|-------------------------|--------|-----------------------|
| | 1884 | 1888 | Differenz in Proc. | 1884 | 1888 | Differenz in Proc. | 1884 | 1888 | Differenz in Proc. |
| 49,5 | 0,2827 | 0,2905 | 2,7 | 1,000 | 0,999 | 0,1 | 0,1811 | 0,1926 | 6,0 |
| 92,4 | 0,3451 | 0,3627 | 4,9 | 1,179 | 1,237 | 4,7 | 0,2384 | 0,2465 | 3,3 |

Vergleicht man zuerst die Werthe bei der niedrigen Temperatur (49,5°), so findet man, dass bei Luft und Kohlensäure die jetzt bestimmten Diffusionscoefficienten grösser, als die früheren sind; beim Wasserstoff ist der Unterschied (0,1 Proc.) fast Null. Für dieses letzte Gas wurde die damalige Bestimmung, weil es sich darum handelte, den Einfluss des Abstandes der Flüssigkeitsoberfläche vom Ende der Röhre zu untersuchen, am genauesten durchgeführt. — Die Differenz für Luft, welche 2,7 Proc. beträgt, kann durch Beobachtungsfehler erklärt werden; denn die älteren Versuche (1884) enthalten nur zwei Bestimmungen für die Temperatur 49,5°, die sich um 2,1 Proc. unterscheiden. — Die Differenz für Kohlensäure, welche 6 Proc. ausmacht, ist nicht vollständig unmittelbar aus Beobachtungsfehlern zu erklären; die älteren Versuche (1884) enthalten vier Bestimmungen, welche um 3,7 Proc. voneinander abweichen, und deren grösster Werth noch 4 Proc. kleiner ist, als der jetzt bestimmte. Es lag der Gedanke nahe, dass die Apparate bei den jetzigen Versuchen ausser Kohlensäure auch noch Luft enthielten, wodurch dann der Diffusionscoefficient zu gross ausfallen musste. Eine sehr vorsichtige Wiederholung, bei welcher auf die Füllung der Apparate die grösste Sorgfalt verwendet wurde, liess aber nur eine sehr geringe Verminderung der Werthe (vgl. § 4) erkennen.

Bei der höheren Temperatur (92,4) sind sämmtliche Werthe aus dem Jahre 1884 kleiner, als die jetzt gefundenen. Da auch beim Wasserstoff die Differenz in gleichem Sinne auftritt, so ist der Verdacht ausgeschlossen, dass eine Undichtigkeit der Apparate dieses Resultat herbeigeführt habe. Es ist schon bemerkt, dass die älteren Beobachtungen, welche

unter dem Gesamtdruck einer Atmosphäre angestellt wurden, für die Diffusionscoefficienten eine Abhängigkeit von dem Abstände der Flüssigkeitsoberfläche am Ende der Röhre zeigten, und dass die älteren Werthe aus den Beobachtungen als Grenzwerte berechnet wurden. Die damals angewandte Formel hatte die Gestalt:

$$D = a - b \cdot c^h,$$

wo h den Abstand der Flüssigkeitsoberfläche vom Ende der Röhre darstellt; da c kleiner als 1 ist, so gibt a den Grenzwert von D für $h = \infty$. Unter den obigen Bestimmungen zeigt Wasserdampf-Luft die grösste Differenz (4,9 Proc.). Ich habe deshalb versucht, mit Hülfe der angegebenen Formel, indem für a der jetzt direct beobachtete Werth eingeführt wurde, die älteren Beobachtungen darzustellen. Gibt man den Constanten die folgenden Werthe:

$$a = 0,3627; \quad \log b = 0,85930 - 2; \quad \log c = 0,99377 - 1,$$

so findet man:

| h | Diffusionscoefficient. | | Differenz in Proc. beob. — berech. |
|------|------------------------|---------|---------------------------------------|
| | beob. | berech. | |
| 23 | 0,3086 | 0,3107 | — 0,7 |
| 44,5 | 0,3285 | 0,3245 | + 1,2 |
| 48,5 | 0,3324 | 0,3266 | + 1,7 |
| 71 | 0,3360 | 0,3366 | — 0,2 |
| 82 | 0,3434 | 0,3404 | + 0,9 |
| 85 | 0,3394 | 0,3411 | — 0,5 |

Die Differenzen der letzten Reihe beweisen, dass auch mit dem jetzt beobachteten Grenzwerte die älteren Beobachtungen sich genügend darstellen lassen.

Die vorliegenden Versuche haben für die untersuchten Combinationen die folgenden Werthe für die Exponenten m geliefert:

| Combination | m |
|-------------------------|--------|
| Wasserdampf-Wasserstoff | 1,712 |
| " -Luft | 1,774 |
| " -Kohlensäure | 1,972. |

Nach der kinetischen Gastheorie ergibt sich die Abhängigkeit der Diffusionscoefficienten der Gase von der Temperatur unmittelbar aus der Abhängigkeit des Reibungscoefficienten. Wird der Reibungscoefficient durch η , der Diffusionscoefficient durch D ausgedrückt, so ist, wenn:

gesetzt wird¹⁾: $\eta_{\theta} = \eta_0 (1 + \alpha \cdot \theta)^n$
 $D_{\theta} = D_0 (1 + \alpha \cdot \theta)^{n+1}.$

Wendet man diese Relation auf die obigen Versuche an, so folgt:

$$m = n + 1.$$

Die Grösse n ist für Wasserdampf, soviel mir bekannt, noch nicht bestimmt, dagegen für eine grosse Anzahl anderer Dämpfe und für viele Gase; je nach der angewandten Methode zeigen die Ergebnisse beträchtliche Unterschiede.

Die Transpirationsmethode lieferte für Luft Werthe von n , welche bei den verschiedenen Beobachtern zwischen 0,56 und 0,77 liegen; hiernach wird das Verhältniss von $\eta_{100}/\eta_0 = 1,19$ bis 1,30. Als das Resultat der genauern Versuche nach der genannten Methode wird man:

$$\frac{\eta_{100}}{\eta_0} = 1,27 \quad \text{oder} \quad n = 0,76$$

hinstellen können.

Die Maxwell'sche Schwingungsmethode lieferte für n grössere Werthe; Maxwell selbst fand n nahezu gleich Eins. Dagegen bestimmte O. E. Meyer²⁾ nach derselben Methode $n = 0,77$ oder $\eta_{100}/\eta_0 = 1,30$. In neuerer Zeit sind die Versuche nach der Maxwell'schen Methode von O. Schumann³⁾ wiederholt; er fand:

$$\eta_{\theta} = \eta_0 \sqrt{(1 + \alpha \cdot \theta) (1 + 0,0382 \cdot \theta)^2}.$$

Hieraus folgt: $\frac{\eta_{100}}{\eta_0} = 1,364$

und deshalb in Uebereinstimmung mit Maxwell n sehr nahe gleich Eins.

Nach Schumann ist die Transpirationsmethode zur Bestimmung des Temperaturcoefficienten der Reibung nicht anwendbar, weil Gründe vorhanden sind, welche bei höherer Temperatur den Reibungscoefficienten verkleinern müssen. Der Hauptgrund besteht in der Condensation der Luft auf der inneren Oberfläche der Glasröhre; diese Condensation wird bei höherer Temperatur abnehmen, hierdurch der Radius

1) O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase p. 176. 1877.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 148. p. 226. 1873.

3) O. Schumann, Wied. Ann. 23. p. 384. 1884.

der Röhre scheinbar grösser werden und deshalb der Reibungscoefficient zu klein ausfallen.

Für Kohlensäure sind die Differenzen nach beiden Methoden nicht so gross, wie für Luft. Aus der Transpiration¹⁾ ergibt sich $n = 0,94$; $\eta_{100}/\eta_0 = 1,34$; aus der Schwingungsmethode²⁾ $n = 1,046$; $\eta_{100}/\eta_0 = 1,39$.

O. Schumann hat ferner die Abhängigkeit der Reibungscoefficienten von der Temperatur für eine Anzahl von Dämpfen ermittelt. Er findet:

$$\eta_s = \eta_0 \sqrt{(1 + 0,004 \cdot \theta)(1 + 0,00164 \cdot \theta)^2}.$$

Hieraus ergibt sich: $\frac{\eta_{100}}{\eta_0} = 1,60$,

und wenn man: $\eta_s = \eta_0 (1 + 0,004 \cdot \theta)^n$
setzt: $n = 1,4$.

Die Abhängigkeit der Diffusionscoefficienten der Gase von der Temperatur, welche durch Loschmidt und v. Obermayer bestimmt wurde, ist in der Einleitung schon mitgetheilt. Um eine Uebersicht für den Zusammenhang von m und n zu geben, dient folgende Zusammenstellung:

| Combination | m | n_1 | n_2 | $n+1 = \frac{n_1+n_2}{2} + 1$ |
|------------------|-------|-------|-------|-------------------------------|
| Kohlensäure-Luft | 1,968 | 0,94 | 0,76 | 1,85 |
| " - Stickoxydul | 2,050 | " | 0,93 | 1,93 |
| " - Wasserstoff | 1,742 | " | 0,70 | 1,82 |
| Sauerstoff - " | 1,755 | 0,80 | " | 1,75 |
| " - Stickstoff | 1,792 | " | 0,74 | 1,77 |

Vergleicht man die Werthe von m mit denen von $(n+1)$ (letzte Verticalreihe), so sieht man, dass die ersteren, mit Ausnahme der Combination Kohlensäure-Wasserstoff, grösser sind. Die Schumann'schen Beobachtungen nach der Maxwell'schen Methode lassen nur eine Vergleichung mit der ersten Combination Kohlensäure-Luft zu; diese ergibt $(n+1) = 2,02$.

Wenn man die Schumann'schen Resultate über die Abhängigkeit der Reibung der Dämpfe von der Temperatur verallgemeinern darf, so würden für die Diffusion von Dämpfen in Gasen für m Werthe zu erwarten sein, die grösser als 2

1) v. Obermayer, Carl's Rep. 13. p. 156. 1877.

2) O. Schumann, l. c. p. 385.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXVI.

sind. Für die Combination Kohlensäure-Dampf würde man erhalten $\frac{1}{2}(n_1 + n_2) + 1 = 2,15$, und wenn man den Schumann'schen Werth für Kohlensäure einführt 2,22. Die in vorliegender Arbeit mitgetheilten Versuche über Wasserdampf liefern kleinere Werthe; die Abhängigkeit der Diffusion von der Temperatur ist nach diesen Versuchen beim Wasserdampf nicht viel von derjenigen der Luft, resp. des Sauerstoffes und des Stickstoffes verschieden; man hat:

| Combination | <i>m</i> | Combination | <i>m</i> |
|-------------------------------|----------|-----------------------------|----------|
| Luft-Kohlensäure | 1,968 | Wasserdampf-Kohlensäure . . | 1,972 |
| Sauerstoff-Wasserstoff . . . | 1,755 | Wasserdampf-Wasserstoff . . | 1,712 |
| Sauerstoff-Stickstoff | 1,792 | Wasserdampf-Luft | 1,774 |

Die Werthe in derselben Horizontalreihe zeigen keine grossen Unterschiede.

Nach der kinetischen Theorie der Gase soll (wenn man von der zuletzt durch Maxwell aufgestellten Hypothese absieht) der Reibungscoëfficient der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur proportional sein, also *n* den Werth 0,5 haben. Der grössere Werth von *n*, wie ihn die Beobachtungen liefern, lässt sich durch die Annahme erklären, dass die moleculare Weglänge mit wachsender Temperatur grösser wird. Diese Vergrösserung der Weglänge wurde von Stefan und später von O. E. Meyer in ähnlicher Weise darauf zurückgeführt, dass bei erhöhter Temperatur die Schwerpunkte der Molecüle im Moment des Stosses einander näher kommen, als bei tieferer Temperatur. Wenn man daher die eben angeführten Werthe von *m* für genügend gesichert halten darf, so wird man schliessen, dass das Molecül H₂O sich ähnlich wie das Molecül N₂ und O₂ verhält, und dass mit wachsender Temperatur die Wirkungssphäre von H₂O sich relativ weniger verkleinert, als dies unter gleichen Umständen bei CO₂ geschieht. Von dem betrachteten Gesichtspunkte würde es von Interesse sein, Dämpfe mit complicirterem Molecülbau zu untersuchen, da bei diesen grössere Werthe von *m* erwartet werden dürfen.

Jena, im October 1888.

V. Ueber das allgemeine Gesetz der bei dem Lösen von Salzen im Wasser auftretenden Volumenverminderung; von A. Heritsch.

(Vorgelegt in der Sitzung der Neurussischen Gesellschaft der Naturforscher am 25. April 1888.)

(Hierzu Taf. II Fig. 1–2.)

Bezeichnet man mit δ die bei der Bildung von 100 g einer Lösung auftretende Volumverminderung, mit p die Gewichtsprocente des Salzes, so lässt sich nachweisen, dass:

$$(1) \quad \delta = C(100 - p)p$$

ist, wo C bei gegebener Temperatur als constant vorausgesetzt ist. Diese durch eine Parabel auszudrückende Function hat ein Maximum bei $p = 50$; auch die Volumcontraction erreicht ihren grössten Werth bei einem Procentgehalt an Salz von ungefähr 50, was eine schon längst beobachtete Thatsache ist. Die symmetrisch zusammengesetzten Lösungen, für welche das Product $(100 - p)p$ gleich gross ist, sollten nach dieser Hypothese auch eine gleiche Volumcontraction haben (siehe unten unsere Tabellen). Da ferner $(100 - p)p > (100 - 2p) \cdot 2p/2$, weil $100 - p/100 - 2p > 1$, so ergibt sich, dass bei der Mischung jeder Lösung von beliebiger Concentration mit Wasser eine Volumverminderung auftreten muss. Das ist auch wirklich der Fall, wie es durch die Untersuchungen von Kremers¹⁾ bestätigt worden ist.

Ich habe den Quotienten C für eine Reihe von wässrigen Salzlösungen berechnet und die dabei erhaltenen Resultate in den weiter angeführten Tabellen zusammengestellt. Die Grösse δ wurde für jede einzelne Lösung nach der folgenden Formel berechnet:

$$(2) \quad \frac{100 - p}{\sigma} + \frac{p}{\delta} - \frac{100}{s} = \delta,$$

wo σ die Dichte des Wassers, δ das specifische Gewicht des

1) Kremers, Pogg. Ann. 95. p. 110. 1855.

gelösten¹⁾ Salzes und s das specifische Gewicht der Lösung bedeutet (alle drei bei derselben Temperatur). Wenn wir annehmen, dass die Gleichung (1) für irgend zwei Lösungen des gegebenen Satzes gültig sei, so haben wir:

$$\frac{\frac{100-p}{\sigma} + \frac{p}{\delta} - \frac{100}{s_1}}{(100-p)p} = \frac{\frac{100-p_1}{\sigma} + \frac{p_1}{\delta} - \frac{100}{s_1}}{(100-p_1)p_1},$$

woraus δ leicht zu bestimmen ist. Die zwei hierzu benutzten Lösungen haben denselben Quotienten $\delta/(100-p)p$. (Diese zwei Lösungen habe ich durch einen verticalen Pfeil verbunden.) Die interpolirten Zahlen gaben mir weniger befriedigende Resultate, als die durch directe Wägung bestimmten Dichtigkeiten. Infolge dessen habe ich bei meinen Bestimmungen, wo es nur möglich war, blos diese letzteren benutzt.

Die in den Tabellen unter dem Zeichen $s_{15^0/4^0}$ angegebenen specifischen Gewichte sind verschiedenen Beobachtern entnommen. Es bedeutet dabei Gl.: Gerlach; Kl.: Kohlrausch; Kr.: Kremers; Fr.: Franz; Sch.: Schiff; Ed.: Eder; Os.: Ostwald.²⁾

1) Im flüssigen Zustande, aber ohne Verdichtung infolge der wechselseitigen Anziehung zwischen den Salz- und Wassermoleculen.

2) Gerlach, Specifische Gewichte der gebräuchlichsten Salzlösungen. Freiberg, 1859. p. 8–27; Gerlach, Zeitschr. f. Analyt. Chemie. 8. p. 245. 1869; Gerlach, Die chemische Industrie. 1866. p. 241. — F. Kohlrausch und Grottrian, Pogg. Ann. 154. p. 215. 1875. — F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 1–51. 1879; F. Kohlrausch, Münchener Acad. Ber. 1875. 5. Mathem. phys. Cl. p. 284. — Kremers, Pogg. Ann. 96. p. 39. 1855. — Hugo Schiff, Liebig's Ann. 113. p. 183. 1860. — Benno Franz, Journ. f. prakt. Chemie. 5. p. 274. 1872. — Ostwald, Journ. f. prakt. Chemie. 22. p. 305. 1880. — Eder, Ber. der Wien. Acad. 82. Abth. II. p. 1284. 1881. — Graham-Otto's Chemie Bd. II. Abth. III. p. 871. 1884. — Landolt und Börnstein, Phys. Chem. Tabellen. 1883.

1. Natriumchlorid. NaCl. (Gl.)
Fest 2,15. Gelöst 1,787.

| p | s15°/4° | δ | C |
|------|---------|-------|-----------|
| 5 | 1,0353 | 1,288 | 0,002 710 |
| 10 A | 1,0724 | 2,427 | 0,002 697 |
| 15 V | 1,1105 | 3,415 | — |
| 20 | 1,1501 | 4,282 | 0,002 677 |
| 25 | 1,1908 | 5,07 | 0,002 704 |

2. Kaliumchlorid. KCl. (Gl.)
Fest 1,977. Gelöst 1,817.

| p | s15°/4° | δ | C |
|------|---------|-------|-----------|
| 5 | 1,0314 | 0,877 | 0,001 847 |
| 10 A | 1,0647 | 1,664 | 0,001 849 |
| 15 | 1,0992 | 2,352 | 0,001 845 |
| 20 V | 1,1351 | 2,953 | — |
| 25 | 1,1715 | 3,46 | 0,001 845 |

3. Ammoniumchlorid.
NH₄Cl. (Gl.)
Fest 1,52. Gelöst 1,174.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 5 | 1,0148 | 0,898 | 0,001 893 |
| 10 A | 1,0299 | 1,701 | 0,001 890 |
| 15 | 1,0443 | 2,386 | 0,001 871 |
| 20 V | 1,0584 | — | — |
| 25 | 1,0721 | 3,572 | 0,001 905 |

4. Aluminiumchlorid.
AlCl₃. (Gl.)
Fest ? Gelöst 2,208.

| | | | |
|---------|--------|-------|-----------|
| 3,83 | 1,0263 | 0,545 | 0,001 480 |
| 7,66 | 1,0544 | 1,049 | 0,001 483 |
| 15,32 A | 1,1143 | 1,948 | 0,001 501 |
| 22,98 V | 1,1788 | — | — |
| 30,64 | 1,2479 | 3,162 | 0,001 488 |
| 38,3 | 1,3230 | 3,510 | 0,001 485 |

5. Strontiumchlorid. SrCl₂. (Gl.)
Fest 3,054. Gelöst 2,9905.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 5 | 1,0444 | 1,002 | 0,002 104 |
| 10 A | 1,0920 | 1,844 | 0,002 049 |
| 15 | 1,1429 | 2,602 | 0,002 042 |
| 20 V | 1,1978 | — | — |
| 25 | 1,2570 | 3,870 | 0,002 064 |
| 30 | 1,3209 | 4,382 | 0,002 086 |

6. Bariumchlorid. BaCl₂. (Gl.)
Fest 3,85. Gelöst 3,824.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 5 | 1,0450 | 0,697 | 0,001 467 |
| 10 A | 1,0942 | 1,305 | 0,001 450 |
| 15 | 1,1475 | 1,837 | 0,001 441 |
| 20 V | 1,2051 | — | — |
| 25 | 1,2685 | 2,758 | 0,001 471 |

7. Calciumchlorid.
CaCl₂. (Gl.)
Fest 2,216. Gelöst 2,149.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 5 | 1,0417 | 1,411 | 0,002 971 |
| 10 A | 1,0860 | 2,653 | 0,002 948 |
| 15 | 1,1326 | 3,760 | 0,002 949 |
| 20 V | 1,1812 | — | — |
| 25 | 1,2325 | 5,561 | 0,002 966 |
| 30 | 1,2868 | 6,309 | 0,003 004 |
| 35 | 1,3412 | 6,787 | 0,002 983 |

8. Magnesiumchlorid.
MgCl₂. (Gl.)
Fest 2,177. Gelöst 1,8925.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 5 | 1,0413 | 1,692 | 0,003 562 |
| 10 A | 1,0850 | 3,194 | 0,003 549 |
| 15 | 1,1301 | 4,521 | 0,003 546 |
| 20 V | 1,1770 | 5,678 | — |
| 25 | 1,2264 | 6,730 | 0,003 589 |
| 30 | 1,2783 | 7,682 | 0,003 692 |

9. Zinnchlorür. SnCl₂. (Gl.)
Fest (wasserfrei) ? Gelöst 3,404.

| | | | |
|---------|--------|-------|-----------|
| 16,78 | 1,1432 | 0,750 | 0,03 5370 |
| 29,36 | 1,2768 | 1,010 | 0,03 4870 |
| 33,56 A | 1,3286 | 1,085 | 0,03 4866 |
| 46,14 V | 1,5093 | 1,210 | — |
| 58,72 | 1,7437 | 1,220 | 0,03 5033 |
| 67,11 | 1,9438 | 1,180 | 0,03 5346 |

10. Natriumnitrat. NaNO₃. (Kr.)
Fest 2,24. Gelöst 2,0623.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 5 | 1,0336 | 0,745 | 0,001 568 |
| 10 | 1,0692 | 1,399 | 0,001 554 |
| 15 A | 1,1449 | 2,524 | 0,001 577 |
| 20 | 1,2281 | 3,221 | 0,001 542 |
| 25 V | 1,3191 | — | — |
| 30 | 1,3690 | 3,83 | 0,001 548 |

11. Kaliumnitrat.
KNO₃. (Gl.)

Fest 2,092.

Gelöst 1,906.

| <i>p</i> | <i>s</i> 15°/4° | <i>δ</i> | <i>C</i> |
|----------|-----------------|----------|-----------|
| 5 | 1,0312 | 0,733 | 0,001 543 |
| 10 ▲ | 1,0643 | 1,366 | 0,001 518 |
| 15 ▼ | 1,0989 | — | — |
| 20 | 1,1350 | 2,462 | 0,001 538 |

12. Kaliumsulfat.
K₂SO₄. (Gl.)

Fest 2,647.

Gelöst 1,795.

| <i>p</i> | <i>s</i> 15°/4° | <i>δ</i> | <i>C</i> |
|----------|-----------------|----------|-----------|
| 1 | 1,0073 | 0,367 | 0,003 707 |
| 3 ▲ | 1,0236 | 1,059 | 0,003 639 |
| 5 | 1,0402 | 1,733 | 0,003 642 |
| 7 ▼ | 1,0570 | — | — |
| 9 | 1,0741 | 2,993 | 0,003 654 |

13. Natriumsulfat.
Na₂SO₄. (Os.)

Fest 2,629.

Gelöst 1,5432.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 2 | 1,0176 | 1,106 | 0,005 643 |
| 4 ▲ | 1,0359 | 2,142 | 0,005 578 |
| 6 | 1,0545 | 3,140 | 0,005 567 |
| 10 ▼ | 1,0924 | — | — |
| 15 | 1,1417 | 7,200 | 0,005 647 |

14. Ammoniumsulfat.
(NH₄)₂SO₄. (Kl.)

Fest 1,762.

Gelöst 1,324.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 10 ▲ | 1,0582 | 3,132 | 0,003 479 |
| 15* | 1,0869 | 4,396 | 0,003 448 |
| 20 ▼ | 1,1160 | — | — |
| 25* | 1,1444 | 6,562 | 0,003 500 |
| 30 | 1,1733 | 7,476 | 0,003 560 |

15. Magnesiumsulfat.
MgSO₄. (Gl.)

Fest 2,65.

Gelöst 2,2435.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 5 | 1,0506 | 2,128 | 0,004 478 |
| 10 ▲ | 1,1043 | 3,987 | 0,004 430 |
| 15 | 1,1612 | 5,636 | 0,004 424 |
| 20 ▼ | 1,2210 | — | — |
| 25 | 1,2837 | 8,308 | 0,004 428 |

16. Zinksulfat.
ZnSO₄. (Gl.)

Fest 3,68.

Gelöst 3,66.

| | | | |
|---------|--------|-------|-----------|
| 5,61 | 1,0584 | 1,523 | 0,002 876 |
| 11,22 | 1,1226 | 2,849 | 0,002 860 |
| 16,83 ▲ | 1,1923 | 3,960 | 0,002 829 |
| 22,44 | 1,2698 | 5,00 | 0,002 872 |
| 28,05 ▼ | 1,3520 | — | — |
| 33,66 | 1,4440 | 6,325 | 0,002 833 |

17. Ammoniumbromid.
NH₄Br. (Ed.)

Fest 2,327.

Gelöst 1,291.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 5 | 1,0326 | 2,029 | 0,004 271 |
| 10 ▲ | 1,0652 | 3,87 | 0,004 300 |
| 15 | 1,0960 | 5,375 | 0,004 216 |
| 20 ▼ | 1,1285 | — | — |
| 30 | 1,1921 | 9,15 | 0,004 352 |

18. Kaliumbromid.
KBr. (Kl.)

Fest 2,69.

Gelöst 2,447.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 10 ▲ | 1,0750 | 1,146 | 0,001 276 |
| 20 ▼ | 1,1602 | — | — |
| 30 | 1,2569 | 2,575 | 0,001 226 |
| 35 | 1,3076 | 2,867 | 0,001 261 |

19. Natriumcarbonat.
Na₂CO₃. (Gl.)

Fest 2,476.

Gelöst 1,225.

| | | | |
|------|---------|-------|-----------|
| 2 | 1,02014 | 1,692 | 0,008 633 |
| 4 ▲ | 1,0411 | 3,296 | 0,008 583 |
| 6 | 1,0622 | 4,833 | 0,008 569 |
| 8 | 1,0834 | 6,312 | 0,008 576 |
| 10 ▼ | 1,1048 | — | — |
| 12 | 1,1264 | 9,097 | 0,008 598 |
| 14 | 1,1485 | 10,43 | 0,008 662 |

20. Kaliumcarbonat.
K₂CO₃. (Gl.)

Fest 2,29.

Gelöst 2,0956.

| | | | |
|------|--------|-------|-----------|
| 5 | 1,0448 | 1,756 | 0,003 697 |
| 10 | 1,0919 | 3,268 | 0,003 631 |
| 20 ▲ | 1,1919 | 5,714 | 0,003 571 |
| 30 | 1,3002 | 7,466 | 0,003 555 |
| 40 ▼ | 1,4175 | — | — |
| 50 | 1,5429 | 9,087 | 0,003 635 |

21. Kaliumacetat.
 $C_2H_3KO_2$. (Gl.)

Fest ? Gelöst 1,581.

| p | $s\ 17^0/4^0$ | δ | C |
|-------------|---------------|----------|-----------|
| 10 | 1,0475 | 0,995 | 0,001 106 |
| 20 | 1,0992 | 1,764 | 0,001 103 |
| 30 | 1,1531 | 2,335 | 0,001 112 |
| 40 Δ | 1,2082 | 2,64 | 0,001 100 |
| 50 | 1,2670 | 2,755 | 0,001 102 |
| 60 ∇ | 1,3270 | 2,637 | — |

22. Mg. Kaliumsulfat.
 $MgK_2(SO_4)_2$. (Sch.)

Fest (wasserfrei) ? Gelöst 1,319.

| p | $s\ 15^0/4^0$ | δ | C |
|----------------|---------------|----------|-----------|
| 3,43 | 1,0303 | 2,19 | 0,006 611 |
| 5,14 Δ | 1,0464 | — | — |
| 6,86 | 1,0620 | 4,26 | 0,006 667 |
| 10,28 ∇ | 1,0954 | 6,21 | 0,006 765 |
| 15,43 | 1,1467 | 9,12 | 0,006 990 |

23. Kaliumhydroxyd. KOH. (Kl.)
Fest 2,04. Gelöst 1,678.

| $s\ 15^0/4^0$ | | | |
|----------------|--------|--------|-----------|
| 4,19 | 1,0381 | 2,057 | 0,005 124 |
| 8,42 Δ | 1,0777 | — | — |
| 16,78 | 1,1588 | 7,494 | 0,005 334 |
| 25,11 ∇ | 1,2431 | 9,481 | 0,005 042 |
| 33,33 | 1,3303 | 11,423 | 0,005 141 |
| 41,7 | 1,4263 | 13,09 | 0,005 262 |

24. Kaliumoxalat. $C_2K_2O_4$. (Fr.)
Fest (wasserfrei) ? Gelöst 1,253.

| $s\ 17,5^0/4^0$ | | | |
|-----------------|--------|-------|-----------|
| 4,5 | 1,0337 | 2,462 | 0,005 728 |
| 9,0 Δ | 1,0656 | 4,45 | 0,005 434 |
| 13,5 | 1,0977 | 6,28 | 0,005 379 |
| 18,0 ∇ | 1,1306 | — | — |
| 22,5 | 1,1638 | 9,58 | 0,005 494 |

25. Weinsäure. $C_4H_6O_6$. (Gl.)
Fest 1,739. Gelöst 1,65.

| $s\ 15^0/4^0$ | | | |
|---------------|--------|-------|----------|
| 10 | 1,0460 | 0,54 | 0,0,6000 |
| 20 Δ | 1,0960 | 0,95 | 0,0,5938 |
| 30 | 1,1495 | 1,25 | 0,0,5952 |
| 40 ∇ | 1,2068 | 1,425 | — |
| 50 | 1,2685 | 1,507 | 0,0,6028 |

26. Citronensäure. $C_6H_8O_7$. (Gl.)
Fest (wasserfrei) ? Gelöst 1,588.

| $s\ 15^0/4^0$ | | | |
|---------------|--------|------|----------|
| 9,10 | 1,0383 | 0,40 | 0,0,4835 |
| 18,2 Δ | 1,0796 | — | — |
| 27,3 | 1,1234 | 0,94 | 0,0,4736 |
| 36,4 ∇ | 1,1699 | 1,09 | 0,0,4708 |
| 45,5 | 1,2193 | 1,18 | 0,0,4745 |
| 54,6 | 1,2724 | 1,22 | 0,0,4922 |

27. Phosphorsäure. H_3PO_4 . (Kl.)
Fest 1,884. Gelöst 1,873.¹⁾

| 10 | 1,0548 | 0,614 | 0,0,6822 |
|----|--------|-------|----------|
| 20 | 1,1151 | 1,068 | 0,0,6706 |
| 30 | 1,1808 | 1,387 | 0,0,6605 |
| 50 | 1,3328 | 1,705 | 0,0,6820 |
| 70 | 1,5155 | 1,417 | 0,0,6748 |
| 80 | 1,6196 | 1,000 | 0,0,6250 |

28. Kupfersulfat. $CuSO_4$. (Gl.)
Fest 3,58. Gelöst 3,337.

| 3,2 | 1,0326 | 1,003 | 0,003201 |
|---------------|--------|-------|----------|
| 6,4 Δ | 1,0680 | 1,954 | 0,003262 |
| 9,6 | 1,1050 | 2,863 | 0,003291 |
| 12,8 ∇ | 1,1433 | — | — |
| 16 | 1,1838 | 4,388 | 0,003265 |

1) Da ich für d (Dichte der gelösten Substanz) ziemlich verschiedene Werthe erhielt, je nachdem ich diese Grösse aus zwei verschiedenen Lösungen berechnete, so musste ich den Mittelwerth nehmen, und zwar:

| | | | | |
|-----------|-----|-----------|---------------|-------|
| 80 $^0/0$ | und | 20 $^0/0$ | gaben für d | 1,869 |
| 70 $^0/0$ | " | 30 $^0/0$ | " | 1,876 |
| 50 $^0/0$ | " | 20 $^0/0$ | " | 1,879 |
| 50 $^0/0$ | " | 85 $^0/0$ | " | 1,866 |
| 50 $^0/0$ | " | 10 $^0/0$ | " | 1,874 |

Mittel 1,873

Auf Grundlage meiner Hypothese habe ich eine allgemeine Formel für den Zusammenhang zwischen der Dichtigkeit s der Lösung und dem Procentgehalte p des Salzes aufgesucht. Aus Formel (1) und (2) folgt:

$$(4) \quad s \left\{ Cp + \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\sigma} - \frac{100}{c} \right) p + \frac{100}{\sigma} \right\} = 100.$$

oder auch:

$$(5) \quad p^2 + \alpha p + \beta = \frac{\gamma}{s},$$

wo gesetzt ist:

$$\alpha = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\sigma} - \frac{100}{C} \right), \quad \beta = \frac{100}{C\sigma}, \quad \gamma = \frac{100}{C}.$$

Für ein gegebenes Salz sind α , β , γ vollkommen bestimmte Grössen, welche man nach der oben angeführten Methode berechnet.

Die Gleichung für p entspricht einer Parabel. Die Wurzeln p sind imaginär (conjugirte complexe Grössen von der Art $q \pm \psi \sqrt{-1}$) oder reell, je nachdem die Constante C relativ gross oder klein ist. Wir können daher die Gleichung (5) in die folgende Form bringen:

$$(6) \quad (p - q)^2 \pm \psi^2 = \frac{\gamma}{s},$$

woraus, je nachdem die Wurzeln reell oder imaginär sind:

$$(7) \quad s = \frac{\gamma}{(p - q)^2 \pm \psi^2}.$$

So erhalten wir z. B. für:

$$\text{Natriumchlorid } s = \frac{37037}{(p - 132)^2 + 19646} \quad (\delta = 1,787, C = 0,0027),$$

$$\text{Bariumchlorid } s = \frac{68965}{(p - 305)^2 - 24001} \quad (\delta = 3,824, C = 0,00145).$$

Taf. II Fig. 1 gibt die entsprechenden Curven, Fig. 2 eine ähnliche Curve, bei der aber p als Abscisse, δ als Ordinate verzeichnet ist.

Die hiernach berechneten specifischen Gewichte von NaCl und BaCl₂ Lösungen bei 15° sind in der folgenden Tabelle mit den Bestimmungen von Gerlach¹⁾ und den nach

1) Gerlach, Specifische Gewichte der gebräuchlichsten Salzlösungen. Freiberg, 1859. p. 9 u. 14.

der Interpolationsformel von Mendeleeff¹⁾ berechneten specifischen Gewichten für BaCl_2 zusammengestellt.

| Procente von NaCl | $s\ 15^\circ/4^\circ$ nach Gerlach | nach Heritsch | Procente von BaCl_2 | $s\ 15^\circ/4^\circ$ nach Gerlach | nach Heritsch | nach Mendeleeff |
|-------------------------|--|------------------|------------------------------------|--|------------------|--------------------|
| 3 | 1,0207 | 1,0207 | 4 | 1,0357 | 1,0355 | 1,0351 |
| 8 | 1,0576 | 1,0574 | 5 | 1,0450 | 1,0450 | 1,0445 |
| 13 | 1,0953 | 1,0953 | 10 | 1,0942 | 1,09425 | 1,0939 |
| 22 | 1,1665 | 1,1663 | 20 | 1,2051 | 1,20515 | 1,2048 |
| 26 | 1,2000 | 1,1988 | 25 | 1,2691 | 1,2667 | 1,2664 |

Die Gleichung (1) gibt uns auch das Gesetz der Volumverminderung einer Lösung von beliebigen Salz- und Wassermengen. Es sei m die Gewichtsmenge des Wassers und m_1 die des Salzes, so leuchtet ein, dass $p = 100 \cdot m_1 / (m + m_1)$ und $100 - p = 100 \cdot m / (m + m_1)$, folglich:

$$(8) \quad \delta = C(100)^2 \frac{m m_1}{(m + m_1)^2}.$$

Die Volumverminderung der ganzen Mischung $(m + m_1)$ erhalten wir, indem wir den Ausdruck (8) mit $(m + m_1) / 100$ multipliciren:

$$(9) \quad \delta_1 = C \cdot 100 \frac{m m_1}{m + m_1} = A \cdot \frac{m m_1}{m + m_1}.$$

Eine Abweichung von der Formel $\delta = C(100 - p)p$ gaben mir die Lösungen von LiCl und $(\text{NH}_4)\text{NO}_3$. Demgemäss hat sich die Grösse δ (d. h. die Dichtigkeit des gelösten Salzes) als veränderlich erwiesen, und zwar ist sie bei den schwächeren Lösungen kleiner, als bei den stärkeren. Ich vermute, dass hierbei bis zu einer gewissen Concentration eine Dissociation der Salzmoecüle eintritt. Danach habe ich die Lösungen der soeben erwähnten Salze in zwei Gruppen getheilt und für jede derselben δ und C berechnet.

In beiden Gruppen ist die Constante C verschieden, aber in jeder einzelnen Gruppe von Lösungen ist sie ziemlich unveränderlich.

1) Mendeleeff in seinem russischen Buche „Untersuchung der wässrigen Lösungen nach ihrem specifischen Gewichte“ (St. Petersburg, 1887) p. 411 gibt die folgende Formel an:

$$\text{BaCl}_2 - 15^\circ/4^\circ. s = 9992 + 86,56 p + 0,318 p^2.$$

Lösung von LiCl

Erste Gruppe.

 $\delta = 1,446.$

Zweite Gruppe.

 $\delta = 1,94.$

| p | $s\ 15^{\circ}/4^{\circ}$ | δ | C |
|-------------|---------------------------|----------|-----------|
| 5 | 1,0280 ¹⁾ | 1,257 | 0,002 65 |
| 10 Δ | 1,0571 | 2,398 | 0,002 66 |
| 15 ∇ | 1,0864 | 3,397 | |
| 20 | 1,1163 | 4,314 | 0,002 696 |
| 25 | 1,1481 | 5,248 | 0,002 79 |

| p | $s\ 15^{\circ}/4^{\circ}$ | δ | C |
|-------------|---------------------------|----------|-----------|
| 30 Δ | 1,1809 | 0,848 | 0,000 404 |
| 35 ∇ | 1,2169 | 0,925 | 0,000 406 |
| 40 ∇ | 1,2546 | 0,968 | |

Lösungen von $(\text{NH}_4)\text{NO}_3$.

Erste Gruppe.

 $\delta = 1,429.$

Zweite Gruppe.

 $\delta = 1,526.$

| p | $s\ 17,5^{\circ}/17,5^{\circ}$ | δ | C |
|-------------|--------------------------------|----------|-----------|
| 10 Δ | 1,0425 | 1,068 | 0,001 187 |
| 20 ∇ | 1,0860 | 1,900 | 0,001 188 |
| 30 | 1,1301 | 2,483 | 0,001 183 |

| p | $s\ 17,5^{\circ}/17,5^{\circ}$ | δ | C |
|-------------|--------------------------------|----------|-----------|
| 40 | 1,1790 | 1,369 | 0,001 571 |
| 50 Δ | 1,2300 | 1,434 | 0,001 574 |
| 60 ∇ | 1,2835 | 1,370 | — |

Die specifischen Gewichte der Lösungen von $(\text{NH}_4)\text{NO}_3$ sind nach den Bestimmungen von Gerlach¹⁾ angegeben.

Physik. Lab. der Univ. Odessa.

VI. *Ueber die Dämpfung der Torsionsschwingungen von verschiedenen Metalldrähten;*
von Arthur Koch.

(Inauguraldissertation.)

(Hierzu Taf. II Fig. 3—4.)

Die erste eingehendere Untersuchung über die Elasticität fester Körper rührt her von Gauss und W. Weber. Letzterer beschäftigte sich speciell mit den Beziehungen, welche zwischen der Ausdehnung und der Spannung eines Cocon-

1) Gerlach's: Specifische Gewichte der gebräuchlichen Salzlösungen.

fadens während einer bestimmten Zeit obwalten.¹⁾ Damit war ein neues Gebiet der Experimentalphysik eröffnet. Weber selbst wusste direct anzuregen, indem er als nothwendiges Bedürfniss hinstellte, die Elasticität vieler und zwar recht verschiedenartiger fester Körper zu untersuchen, um das Wesen der Elasticität näher zu erforschen.

Seit jener Zeit ist eine Reihe interessanter Entdeckungen auf diesem Gebiete zu Tage gefördert worden. Natürlich blieb die Forschung nicht auf Ausdehnung und Deformation beschränkt. Man richtete sein Augenmerk auch auf die Torsion, und gerade in unserer Zeit haben mehrfache Untersuchungen über Torsionsschwingungen stattgefunden. Dass derartige Forschungen manche Entdeckungen im Gefolge haben mussten, liegt auf der Hand.

So zeigte G. Wiedemann in einer Abhandlung: „Ueber die Torsion und die Beziehung derselben zum Magnetismus“²⁾, dass ein tordirter Draht theilweise detordirt werde, wenn man ihn magnetisire. Ferner³⁾, dass ein Eisendraht, der während oder nach dem Durchleiten eines galvanischen Stromes tordirt wird, magnetisch wird.

Die Erscheinung der elastischen Nachwirkung, die Weber für die Ausdehnung eines elastischen festen Körpers definirt und erwiesen, wurde von F. Kohlrausch auch bei der Torsion von Metalldrähten nachgewiesen.⁴⁾

In der folgenden Zeit wandten sich H. Streintz⁵⁾, P. M. Schmidt⁶⁾, F. Neesen⁷⁾ und O. E. Meyer⁸⁾ zu umfangreichen experimentellen Untersuchungen über die elastische Nachwirkung und die Dämpfung der Torsionsschwingungen von Metalldrähten.

Bei allen Versuchen, die den angeführten Abhandlungen zu Grunde lagen, wurde die Torsion hervorgerufen durch

1) W. Weber, Pogg. Ann. 34. p. 247; 54. p. 1.

2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 106. p. 161. 1859.

3) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 117. p. 193. 1862.

4) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 119. p. 337. 1863.

5) H. Streintz, Wien. Ber. 69. p. 337. 1874.

6) P. M. Schmidt, Wied. Ann. 2. p. 48. 1877.

7) F. Neesen, Pogg. Ann. 157. p. 579. 1876.

8) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 151. p. 108. 1874.

sehr sinnreiche Apparate, die aber alle durch Uebertragung mit dem Drahte direct in Verbindung standen¹⁾, wodurch ein störender Einfluss bei Torsionsschwingungen kaum vermieden werden kann. Ferner scheint mir die Luftreibung bei allen Versuchen nicht genügend berücksichtigt; endlich steht einer Vergleichung der Metalle in Beziehung auf die Dämpfungsstärke eine nicht vollkommen gleichmässige Behandlung der Drähte entgegen.

Aus diesen Gründen schien es mir von Interesse zu sein, Torsionsschwingungen durch einen Magnetstab hervorzurufen und zu beobachten; die Luftreibung durch entsprechende Versuche zu eliminiren und endlich eine grössere Anzahl von verschiedenen Metalldrähten bei gleicher Länge, gleichem Durchmesser, gleicher Belastung und gleicher Behandlung zu prüfen, und zwar im ungeglühten und ausgeglühten Zustande.

Der Apparat, den ich zu diesen Untersuchungen construiren liess, war im wesentlichen folgender (Fig. 3): An der Wand war eine 157 cm lange Stange (*ab*) sicher befestigt, die auf der oberen Seite mit einem Querholz (*bc*) fest verbunden war. An der unteren Seite trug dieselbe einen durch starke Messingschrauben befestigten Holzkasten. Von demselben nach dem Querholz lief vertical eine Glasröhre (*de*) von 3,1 cm Durchmesser. Dieselbe passte genau in eine conische Oeffnung (*d*) auf den Deckel des Kastens. Ebenso konnte sie oben (bei *e*) durch einen ringförmigen Kork sicher abgeschlossen werden, um gegen äussere Luftströmungen zu schützen. In die Glasröhre hinein ragte von oben eine Messingstange (von *f* bis *e*), die mit einem Schraubengewinde versehen bis zu 50 cm in die Glasröhre hineingeschraubt werden konnte, und die in der gehörigen Weise oben befestigt war. Das Schraubengewinde selbst lief am unteren Ende conisch zu, war der Länge nach durch einen feinen Schnitt aufgesägt und trug eine conische Schraube. In jenen Schnitt wurde der zu untersuchende Draht hineingesteckt und durch die Schraube angezogen.

1) z. B. Pogg. Ann. 106. p. 161, 1859. Apparat von G. Wiedemann.

An der unteren Seite wurde der Draht durch eine ähnliche Vorrichtung in ein Messingstück, welches gleichzeitig das Gewicht (g) trug, eingeklemmt. Das Gewicht selbst bestand aus Messing und Blei und hatte die Form eines Cylinders. Derselbe steckte in einer Messinghülse und konnte durch Verschieben dieser Hülse auf das Doppelte verlängert werden. Auf dem Gewichte befand sich ein kleiner Spiegel und eine Magnethnadel in Richtung des magnetischen Meridians befestigt. Zu erwähnen wäre noch, dass der Kasten seitlich zu öffnen war, dass der Deckel oben einen Einschnitt (hi) trug, durch den der Draht beim Einspannen geführt werden musste, und dass dieser Einschnitt bei jedem Versuche durch einen Streifen Papier zugeklebt wurde. Beobachtet wurde mittelst Fernrohr und Scala. Die Entfernung derselben vom Spiegel betrug 180 cm.

Die zu den Untersuchungen benutzten Drähte waren alle, wie schon oben erwähnt, auf ganz gleichmässige Weise behandelt. Durch ein Zugeisen auf genau gleichen Durchmesser gebracht, hingen sie zwei Monate hindurch, belastet durch gleiche Gewichte. Unmittelbar vor dem Gebrauche wurden sie durch einen mit Oel befeuchteten Lederlappen sorgfältig von der etwaigen Oxydschicht befreit. Dann erst wurde der betreffende Draht in den Apparat eingespannt und das Fernrohr eingestellt. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass von den durch das Hängen an beiden Enden conisch gewordenen Drähten stets nur der mittlere Theil in Anwendung kam. Die erste Beobachtung wurde jedesmal erst am folgenden Tage ausgeführt, nachdem der Draht vollkommen zur Ruhe gekommen war, und zwar folgendermassen.

Durch den Magnet wurde der Draht in Torsionsschwingungen versetzt. Die erste Beobachtungsreihe wurde ausgeführt bei einer anfänglichen Scalendifferenz von circa 500 mm, alle übrigen bei einer solchen von circa 300 mm. Beobachtet und notirt wurde von 20 zu 20 Schwingungen im ganzen fünfmal, und zwar wurde stets aus je fünf aufeinander folgenden Umkehrpunkten q_1 bis q_5 der mittlere Ausschlag auf der linken Seite $q_l = (q_1 + 2q_3 + q_5)/4$, der

auf der rechten $q_r = (q_2 + q_4)/2$ gesetzt. Während der ersten beiden Beobachtungsreihen wurde der Magnetstab entfernt. Erst bei den folgenden Versuchen wurde der Erdmagnetismus durch einen in der Richtung des magnetischen Meridians aufgestellten Magnetstab verstärkt oder abgeschwächt und damit die Schwingungsdauer verkleinert oder vergrößert. Zum Schlusse wurde wieder eine Versuchsreihe nach Entfernung des Magnetstabes aufgestellt.

Nun wurde die Metallhülse, in welcher das Gewicht steckte, abgezogen, mit Watte lose ausgefüllt und wieder so aufgesteckt, dass der Cylinder um das Doppelte verlängert wurde. Dadurch wurde die Luftreibung ungefähr um das Doppelte vermehrt. Die Watte im Cylinder hatte den Zweck, dass die in der Hülse befindliche Luftsäule nicht ihrerseits durch Reibung an den Innenwänden die gesammte Luftreibung beträchtlich beeinflusste. Im übrigen konnte das Gewicht der Watte (0,615 g) gegenüber dem des ganzen Cylinders (546,7 g) ohne grösseren Fehler vernachlässigt werden.

War dies geschehen, so liess ich den Draht drei bis vier Stunden hindurch zur Ruhe kommen, um dann noch einmal ähnliche Reihen wie vorhin aufzustellen. Die Temperatur wurde jedesmal vor Beginn und nach Schluss einer Versuchsreihe notirt. Das Thermometer (Celsius) war auf einem Stative unmittelbar neben der Glasröhre aufgestellt.

Die Schwingungsdauer T wurde mit Hülfe eines Chronoskops während einer Versuchsreihe zehn- bis zwölfmal bestimmt und daraus der Mittelwerth genommen; im übrigen von einem Umkehrpunkte bis wieder zu eben demselben in Anrechnung gebracht.

Das logarithmische Decrement L ist berechnet nach der Gleichung:

$$L = \frac{\log q_n - \log q_m}{n - m}.$$

Die Mittelwerthe L_m sind stets bestimmt aus L_1 , L_3 und L_5 , weil diese Grössen die Form haben:

$$L_1 = \log a - \log b, \quad L_2 = \log b - \log c, \quad L_3 = \log c - \log d \text{ u. s. w.}$$

Eine Hauptschwierigkeit bei diesen Untersuchungen bot die Elimination der Luftreibung. Um diesen Zweck zu erreichen, verglich ich bei gleicher Schwingungsdauer je zwei zugehörige Werthe L'_m und L_m , wobei L'_m das logarithmische Decrement bei grösserer, L_m das bei geringerer Luftreibung, in der Weise, wie oben erwähnt, bezeichnet. Für eine Reihe von Beobachtungen der verschiedenen Metalldrähte ergab sich nach ansteigendem T geordnet, folgende Tabelle:

Tabelle I.

| T_m | $L'_m \cdot 10^4$ | $L_m \cdot 10^4$ | $(L'_m - L_m) \cdot 10^4$ |
|--------|-------------------|------------------|---------------------------|
| 6,805 | 16,19 | 14,04 | 2,15 |
| 7,058 | 11,62 | 9,58 | 2,04 |
| 7,701 | 10,77 | 8,33 | 2,44 |
| 7,84 | 9,51 | 7,53 | 1,98 |
| 7,921 | 11,04 | 9,73 | 1,31 |
| 8,09 | 19,24 | 17,19 | 2,05 |
| 9,503 | 15,64 | 14,39 | 1,25 |
| 9,628 | 13,47 | 10,72 | 2,75 |
| 10,07 | 25,57 | 23,55 | 2,02 |
| 10,085 | 10,07 | 8,15 | 1,92 |
| 10,548 | 10,08 | 8,62 | 1,46 |
| 10,71 | 12,99 | 10,91 | 2,08 |
| 10,808 | 94,26 | 91,78 | 2,48 |
| 11,209 | 21,74 | 19,86 | 1,88 |
| 11,943 | 51,43 | 48,64 | 2,79 |
| 11,959 | 17,03 | 14,74 | 2,29 |
| 12,86 | 15,60 | 13,45 | 2,15 |
| 13,38 | 45,85 | 43,25 | 2,60 |
| 13,73 | 26,63 | 25,14 | 1,49 |

Aus der letzten Columne dieser Tabelle ist einerseits ersichtlich, dass der Einfluss der Luftreibung durchaus nicht ganz vernachlässigt werden darf; andererseits, dass derselbe als nahezu constant erscheint. Da nun durch die getroffenen Vorrichtungen die Luftreibung durch das Herunterziehen des Hohlcyinders nahezu verdoppelt wurde, so werden die logarithmischen Decremente mit grosser Annäherung unabhängig von der Luftreibung sein, wenn man das Mittel der Werthe $L'_m - L_m$, d. h. 2,059 von den jedesmaligen logarithmischen Decrementen in Abzug bringt. In allen folgenden Tabellen sind daher die logarithmischen Decremente gleich durch Subtraction von 2,059 corrigirt.

Vergleichen wir jetzt bei veränderlicher Schwingungsdauer T , wie es auch dem Gange der experimentellen Untersuchung entspricht, T selbst mit dem logarithmischen Decrement und dem Maass der Dämpfung $L: T^2$.

Für einen Silber- und einen Neusilberdraht ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe:

Tabelle II.

| T | $L \cdot 10^4$ | $L \cdot 10^4 : T^2$ | T | $L \cdot 10^4$ | $L \cdot 10^4 : T^2$ |
|--------|----------------|----------------------|-----------|----------------|----------------------|
| Silber | | | Neusilber | | |
| 7,97 | 21,141 | 0,3328 | 7,84 | 5,471 | 0,08901 |
| 10,05 | 32,276 | 0,3196 | 10,77 | 8,851 | 0,07631 |
| 11,903 | 45,321 | 0,3198 | 12,86 | 11,391 | 0,06888 |
| 16,066 | 78,751 | 0,3051 | 15,653 | 16,041 | 0,06547 |
| 21,6 | 141,751 | 0,3038 | 23,663 | 31,961 | 0,05708 |

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass L mit wachsendem T zunimmt, während $L: T^2$ mit wachsendem T abnimmt.¹⁾ Das Gesetz, welches das Abhängigkeitsverhältniss zwischen L und T angibt, lässt sich aus jener Eigenschaft der Function leicht ermitteln. Es sei:

$$\frac{L}{T^2} = f(T),$$

wo $f(T)$ der ausgesprochenen Bedingung genügen muss. Eine derartige Function wäre z. B.:

$$f(T) = A - C \cdot T^2,$$

woraus:

$$L = A T^2 - C \cdot T^4,$$

folgen würde, oder: $f(T) = A + \frac{B}{T}$,

woraus:

$$L = A T^2 + B T.$$

sich ergäbe. Um diese Frage allgemeiner zu entscheiden, setzte ich:

$$f(T) = b + a T^n,$$

Hiernach wäre:

$$L = b \cdot T^2 + a T^{n+2}.$$

Für den ersten, dritten und letzten Werth von L und T ergeben sich hiernach für die eben besprochenen Drähte die beiden Gleichungssysteme:

1) Vgl. auch Tab. 5.

$$21,141 = b \cdot 7,97^2 + a \cdot 7,97^{n+2}$$

$$45,321 = b \cdot 11,903^2 + a \cdot 11,903^{n+2}$$

$$141,751 = b \cdot 21,6^2 + a \cdot 21,6^{n+2}$$

$$\text{und: } 5,471 = b \cdot 7,84^2 + a \cdot 7,84^{n+2}$$

$$11,391 = b \cdot 12,86^2 + a \cdot 12,86^{n+2}$$

$$31,961 = b \cdot 23,663^2 + a \cdot 23,666^{n+2}.$$

Bestimmt man hieraus die Constanten a , b und n , so ergibt das erste System:

$$a = 0,61225 \quad b = 0,27856 \quad n = -1,09785,$$

das zweite:

$$a = 0,23120 \quad b = 0,04581 \quad n = -0,8907.$$

Aus diesen Lösungen lässt sich wohl annehmen, dass $n = -1$ gesetzt eine befriedigende Annäherung liefern wird. Hierfür geht aber die allgemeine Gleichung:

$$L = b T^2 + a T^{n+2}$$

über in:

$$L = a T + b T^2.$$

Berechnet man nach dieser Gleichung für gegebene Werthe von T die logarithmischen Decremente der verschiedenen Metalldrähte und stellt sie den beobachteten Werthen gegenüber, so ergibt sich folgende Tabelle:

Tabelle III.

| | T | $L \cdot 10^4$ beob. | $L \cdot 10^4$ ber. |
|---------|--------------|----------------------|---|
| Kupfer. | Länge: | 100 cm | |
| | Durchmesser: | 0,027 cm | $L \cdot 10^4 = 3,656 T + 0,4271 T^2.$ |
| | 10,793 | 89,221 | 89,220 |
| | 15,540 | 159,971 | 159,963 |
| Silber. | Länge: | 100 cm | |
| | Durchmesser: | 0,027 cm | $L \cdot 10^4 = 0,61965 T + 0,18705 T^2.$ |
| | 10,03 | 24,401 | 25,035 |
| | 13,275 | 41,191 | 41,186 |
| Silber. | 15,73 | 55,281 | 56,027 |
| | Länge: | 75 cm | |
| | Durchmesser: | 0,027 cm | $L \cdot 10^4 = 0,3121 T + 0,2909 T^2.$ |
| | 7,97 | 21,141 | 20,967 |
| | 10,05 | 32,276 | 32,517 |
| | 11,903 | 45,321 | 44,935 |
| | 16,066 | 78,751 | 80,104 |
| | 21,6 | 141,751 | 142,441 |

| | <i>T</i> | <i>L</i> · 10 ⁴ beob. | <i>L</i> · 10 ⁴ ber. |
|------------|--------------|----------------------------------|---|
| Eisen. | Länge: | 100 cm | $L \cdot 10^4 = 0,9875 \, T + 0,1118 \, T^2$ |
| | Durchmesser: | 0,027 cm | |
| | 6,805 | 11,981 | |
| | 8,027 | 15,126 | |
| | 10,07 | 21,491 | |
| Platin. | Länge: | 100 cm | $L \cdot 10^4 = 0,3639 \, T + 0,09968 \, T^2$ |
| | Durchmesser: | 0,027 cm | |
| | 7,058 | 7,524 | |
| | 9,455 | 12,331 | |
| | 16,07 | 31,541 | |
| Messing. | Länge: | 100 cm | $L \cdot 10^4 = 0,16975 \, T + 0,0736 \, T^2$ |
| | Durchmesser: | 0,027 cm | |
| | 8,903 | 7,481 | |
| | 12,019 | 12,676 | |
| | 15,610 | 20,861 | |
| Neusilber. | Länge: | 100 cm | $L \cdot 10^4 = 0,395 \, T + 0,04085 \, T^2$ |
| | Durchmesser: | 0,027 cm | |
| | 7,84 | 5,471 | |
| | 10,77 | 8,851 | |
| | 12,86 | 11,391 | |
| | 15,653 | 16,041 | |
| | 23,663 | 31,961 | 32,217 |

Zur Uebersicht habe ich die beobachteten Werthe von $L \cdot 10^4$ und T graphisch dargestellt, wobei T zur Abscisse $L \cdot 10^4$ zur Ordinate gewählt ist (Fig. 4). Aus dieser Darstellung drängt sich sofort die Eintheilung der Metalle nach ihrer Dämpfungsstärke auf. Hiernach steht Kupfer mit der grössten Dämpfung oben an. Dann folgen Silber, Eisen, Platin, Messing und endlich Neusilber. Werden die Drähte ausgeglüht, so ändert sich der Charakter dieser Curven nicht, wohl aber die Dämpfung und damit L . Ist daher die Beziehung zwischen L und T bei einem ungeglühten Drahte:

$$L = aT + bT^2,$$

so liegt es nahe, für denselben Draht im ausgeglühten Zustande die Gleichung:

$$L = n(aT + bT^2)$$

anzusetzen. Für die Drähte der vorigen Tabelle, mit Ausnahme des dritten und letzten, die beim Glühen an einer Stelle schmolzen, ergibt sich dann die folgende Zusammenstellung:

Tabelle IV.

| <i>T</i> | <i>L</i> · 10 ⁴ beob. | <i>L</i> · 10 ⁴ berechn. | <i>n</i> | <i>T</i> | <i>L</i> · 10 ⁴ beob. | <i>L</i> · 10 ⁴ berechn. | <i>n</i> |
|---|-------------------------------------|--|----------|--|-------------------------------------|--|----------|
| Kupfer $L \cdot 10^4 = 0,18108 (3,656 T + 0,4271 T^2)$ | | | | Platin $L \cdot 10^4 = 0,68844 (0,9639 T + 0,09968 T^2)$ | | | |
| 8,813 | 11,251 | 13,182 | 0,15456 | 7,701 | 6,271 | 6,0000 | 0,71955 |
| 11,208 | 16,639 | 17,136 | 0,17990 | 9,595 | 8,276 | 8,7210 | 0,65330 |
| 13,73 | 23,081 | 23,670 | 0,17660 | 15,95 | 22,831 | 21,455 | 0,73260 |
| 15,75 | 31,571 | 29,612 | 0,19305 | 23,195 | 40,241 | 42,732 | 0,64830 |
| 22,605 | 60,571 | 54,485 | 0,20130 | | | | |
| Silber $L \cdot 10^4 = 0,61462 (0,61965 T + 0,18705 T^2)$ | | | | Messing $L \cdot 10^4 = 0,63534 (0,16975 T + 0,07363 T^2)$ | | | |
| 7,516 | 9,191 | 9,357 | 0,60370 | 8,083 | 4,531 | 3,928 | 0,73290 |
| 10,54 | 16,551 | 16,785 | 0,60605 | 10,123 | 6,091 | 5,886 | 0,65752 |
| 13,815 | 27,576 | 27,203 | 0,62305 | 13,485 | 8,851 | 9,961 | 0,56454 |
| 15,42 | 32,851 | 33,208 | 0,60801 | 15,053 | 11,281 | 12,224 | 0,58638 |
| 21,09 | 60,871 | 59,168 | 0,63230 | | | | |
| Eisen $L \cdot 10^4 = 0,55915 (0,9875 T + 0,1118 T^2)$ | | | | | | | |
| 7,857 | 7,676 | 8,638 | 0,52354 | | | | |
| 10,52 | 11,951 | 13,410 | 0,52505 | | | | |
| 16,29 | 32,891 | 26,956 | 0,71885 | | | | |

Versucht man hier, die Werthe von *L* und *T* graphisch darzustellen, so erhält man nicht mehr so gleichmässige Curven, wie bei den ungeglühten Drähten. Doch liegt dies in der Natur der Sache. Das Ausglühen der dünnen Drähte konnte unmöglich ganz regelmässig vor sich gehen, denn es wurde dieser Act dadurch bewerkstelligt, dass die Drähte vorsichtig durch eine Spiritus-, beziehungsweise Gasflamme geführt wurden. Daher ist es leicht erklärlich, dass der Draht an einigen Stellen etwas mehr ausgeglüht war, wie an anderen, und damit ist eine mehr oder minder grosse Unregelmässigkeit im Verlaufe der Curven, die durch *L* und *T* repräsentirt werden, gegeben. Immerhin ist aber noch die frühere Reihenfolge der Metalle zu erkennen. Allerdings liegen die Curven für Kupfer und Silber sehr nahe, wechseln sogar für eine Strecke ihre Reihenfolge.

Interessant war mir, dass die bis jetzt zu Grunde gelegte Gleichung mit der Boltzmann'schen Theorie¹⁾ in Einklang steht, ja sich aus derselben herleiten lässt, wenn man gewisse

1) Boltzmann, Wien. Ber. 70. 1874. Pogg. Ann. Ergbd. 7. p. 627. Vgl. auch: Rieke, Wied. Ann. 20. p. 484. 1883.

Specialisirungen vornimmt, die den vorliegenden Untersuchungen entsprechen.

Bezeichnet man mit:

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial z}$$

die Dehnungen der Längeneinheit in Richtung der x -, y -, z -Aren;

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

so gelten für die elastischen Kräfte bei vollkommen elastischen festen Körpern die Gleichungen¹⁾:

$$\begin{array}{ll} N_1 = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & T_1 = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ N_2 = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & T_2 = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ N_3 = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & T_3 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{array}$$

Vorausgesetzt wird dabei, dass auch bei ungleichförmiger Dehnung sehr kleine Parallelepipeda als gleichförmig gedehnt betrachtet werden.²⁾ Von diesen Gleichungen geht Boltzmann aus. Dabei nimmt er aber an, dass die Kräfte, die auf die Begrenzungsflächen des Parallelepipeds zu einer bestimmten Zeit wirken, nicht bloß abhängen von der Dehnung des Parallelepipeds zu einer bestimmten Zeit, sondern auch von den vorhergegangenen Dehnungen desselben, wobei jedoch eine Dehnung einen um so geringeren Einfluss hat, vor je längerer Zeit sie stattfand, und zwar ist die Kraft, welche zur Erzeugung einer bestimmten Dehnung erforderlich ist, geringer, wenn schon früher eine Deformation im gleichen Sinne statt hatte. Boltzmann nennt diese Thatsache, dass eine früher vorhandene Dehnung die Kraft, welche zur Erzeugung einer Dehnung im gleichen Sinne nothwendig ist, vermindert, „die durch jene frühere Dehnung erzeugte Kraftverminderung“. Ferner, wenn zu irgend einer Zeit τ während des Zeitdifferentials $d\tau$ der Körper die Dehnung $\alpha(\tau)$

1) Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*.

2) Clebsch, *Elasticitätstheorie*.

hatte, dass die Kraftverminderung, welche diese Dehnung auf die zur Zeit t wirkende Kraft ausübt, proportional $d\tau$; $\alpha(\tau)$ und einer Function der Zeit:

$$(t - \tau) = \omega$$

ist, vor welcher die Dehnung statt hatte. Endlich, dass sich der Einfluss der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Deformationen superponirt, d. h., dass die Kraftverminderung, welche eine bestimmte vor einer bestimmten Zeit stattgefundene Dehnung erzeugt, nicht abhängt von den Zuständen, welche der Körper inzwischen durchlaufen hat. Unter diesen Voraussetzungen gehen die ersten Gleichungen bei Einführung zweier Functionen der Zeit $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, welche angeben, in welcher Weise die Kräfte vermindernde Eigenschaft vorangegangener Deformationen von der Zeit abhängen, über in:

$$N_1 = \lambda \{ \alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) \} + 2\mu \alpha(t) - \int_0^t d\omega \varphi(\omega) \{ \alpha(t-\omega) + \beta(t-\omega) + \gamma(t-\omega) \} - 2 \int_0^t d\omega \psi(\omega) \alpha(t-\omega).$$

oder zusammengefasst:

$$N_1 = \lambda(t) + 2\mu \frac{\partial u(t)}{\partial x} - \int_0^t d\omega \left[\varphi(\omega) \Theta(t-\omega) + 2\psi(\omega) \frac{\partial u(t-\omega)}{\partial x} \right].$$

Analog N_2 und N_3 .

$$T_1 = \mu \left\{ \frac{\partial v(t)}{\partial z} + \frac{\partial w(t)}{\partial y} \right\} - \int_0^t d\omega \psi(\omega) \left\{ \frac{\partial v(t-\omega)}{\partial z} + \frac{\partial w(t-\omega)}{\partial y} \right\}.$$

Analog T_2 und T_3 .

Ist l die Länge des Drahtes, R der Radius, und die Cylinderaxe die x -Axe; ferner für den obersten Querschnitt $x=0$; ist das Trägheitsmoment des Gewichtes sehr gross, und nimmt man an, dass der Draht in jedem Augenblicke gleichförmig tordirt sei, so ist:

$$u=0; \quad v = -\frac{xz}{l} \vartheta(t); \quad w = \frac{xy}{l} \vartheta(t).$$

Damit ist die Bewegungsgleichung:

$$(1) \quad D - K \frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2l} \left\{ \mu \vartheta(t) - \int_0^t d\omega \psi(\omega) \vartheta(t-\omega) \right\}.$$

Dabei ist K das Trägheitsmoment, $\vartheta(t)$ der Winkel, um den infolge der Torsion der unterste Querschnitt des Drahtes zur Zeit t gedreht ist, D das auf denselben zu derselben Zeit von aussen wirkende Drehungsmoment. Aus dieser Gleichung stellt Boltzmann durch Specialisirung Formeln für D , ϑ und $\psi(t)$ auf. In dem folgenden Theile der Abhandlung setzt er dann:

$$\lambda = \int_0^{\infty} \frac{F(\omega) d\omega}{\omega}; \quad \varphi(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega};$$

$$\mu = \int_0^{\infty} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega}; \quad \psi(\omega) = \frac{f(\omega)}{\omega},$$

wo $f(\omega)$ eine Function sein soll, die für mässige ω nahezu constant, für sehr grosse bis unendlich grosse ω gegen Null convergirt. Im weiteren Verlaufe wird dann $D = 0$ gesetzt.

Bei meinen Versuchen ist D von Null verschieden, da äussere Kräfte durch die Einwirkung des Erdmagnetismus vorlagen. Die Resultante derselben sei proportional dem Ablenkungswinkel, also:

$$D = p \cdot \vartheta(t),$$

wobei p einen constanten Werth bezeichnet. Dann geht Gl. (1) bei gleichzeitiger Einführung von:

$$\mu = \int_0^{\infty} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega \quad \text{und} \quad \psi = \frac{f(\omega)}{\omega} \quad \text{über in:}$$

$$(2) \quad p \cdot \vartheta(t) - K \frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2t} \int_0^{\infty} \{ \vartheta(t) - \vartheta(t - \omega) \} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega.$$

Der Draht schwinde von der Zeit $t = 0$ an. Damit ist für negative t :

$$\vartheta(t) = 0,$$

für positive: $\vartheta(t) = C \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}.$

Bildet man hiernach $d^2 \vartheta(t)/dt^2$, sowie:

$$\int_0^{\infty} \{ \vartheta(t) - \vartheta(t - \omega) \} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega = C \cdot e^{-\alpha t} \sin \frac{2\pi t}{T} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega \right.$$

$$\left. - \int_0^{\infty} e^{t\omega} \cos \frac{2\pi \omega}{T} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega \right\} + C \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} \int_0^{\infty} e^{t\omega} \sin \frac{2\pi \omega}{T} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega,$$

und setzt man diese Werthe in Gl. (2) ein, so wird nach Forthebung des gemeinsamen Factors $C \cdot e^{-\epsilon t}$ dieselbe übergehen in:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & p \sin \frac{2\pi t}{T} + K \left(\frac{4\pi^2}{T^2} - \epsilon^2 \right) \sin \frac{2\pi t}{T} + K \cdot \frac{4\pi\epsilon}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \\ & = \frac{\pi R^4}{2l} \sin \frac{2\pi t}{T} \left\{ \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega - \int_0^\infty e^{\epsilon\omega} \cos \frac{2\pi\omega}{T} \cdot \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega \right\} \\ & + \frac{\pi R^4}{2l} \cos \frac{2\pi t}{T} \int_0^\infty e^{\epsilon\omega} \sin \frac{2\pi\omega}{T} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega. \end{aligned} \right.$$

Setzt man die Coëfficienten von $\sin \frac{2\pi t}{T}$ und $\cos \frac{2\pi t}{T}$ auf beiden Seiten gleich, so resultiren aus Gl. (3) die Gleichungen:

$$(4) \quad p + K \left(\frac{4\pi^2}{T^2} - \epsilon^2 \right) = \frac{\pi R^4}{2l} \left\{ \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega - \int_0^\infty e^{\epsilon\omega} \cos \frac{2\pi\omega}{T} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega \right\},$$

$$(5) \quad K \frac{4\pi\epsilon}{T} = \frac{\pi R^4}{2l} \int_0^\infty e^{\epsilon\omega} \sin \frac{2\pi\omega}{T} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega.$$

Für die rechte Seite der Gl. (4) lässt sich der constante Werth:

$$\frac{\pi R^4 A}{2l} = a$$

eingeführen, desgleichen, wenn nur eine Annäherung angestrebt werden soll, in Gl. (5) für $f(\omega)$ die Constante B , wobei dann ω nur mässige Werthe haben soll. Wird endlich $\epsilon^2 = 1$ gesetzt, da ϵ sehr klein ist, so gehen die Gleichungen (4) und (5) über in:

$$(6) \quad p + K \left(\frac{4\pi^2}{T^2} - \epsilon^2 \right) = \frac{\pi R^4 A}{2l} = a,$$

$$(7) \quad K \frac{4\pi\epsilon}{T} = \frac{\pi R^4 B}{2l} \int_0^\infty \sin \frac{2\pi\omega}{T} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Aus (6) folgt für $\epsilon = 0$:

$$(8) \quad p + K \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = a, \quad \text{und daraus:}$$

$$(9) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{a-p}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 K l}{\pi R^4 A - 2lp}}.$$

Kehren wir zurück zu Gleichung (7). Es sei:

$$b = \frac{\pi R^4 B}{2l},$$

da ferner $2\pi/T$ stets > 0 ist, so ist:

$$\int_0^\infty \sin \frac{2\pi\omega}{T} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2}.$$

Demnach geht (7) über in:

$$(10) \quad \frac{K \cdot 4\pi\varepsilon}{T} = b \frac{\pi}{2},$$

$$\text{also:} \quad \varepsilon = \frac{bT}{8K} = \sqrt{\frac{\pi^2 R^8 B^2 8\pi^2 \cdot Kl}{4l^2 \cdot 64 K^2 (\pi R^4 A - 2lp)}}, \quad \text{oder:}$$

$$(11) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\pi^4 R^8 B^2}{32 K \cdot l \cdot (\pi R^4 A - 2lp)}}.$$

Aus (9) und (11) folgt das logarithmische Decrement:

$$(12) \quad L = \varepsilon \cdot T = \frac{\pi^3 R^4 B}{2(\pi R^4 A - 2lp)} = \frac{\pi^3 B}{2 \left(\pi A - \frac{2lp}{R^4} \right)}.$$

Hieraus folgt zunächst, dass L mit l und p wächst. Aus Gleichung (9) folgt ferner, dass:

$$T^2 = \frac{8\pi^2 Kl}{\pi R^4 A - 2lp} \text{ ist, oder: } \pi R^4 A - 2lp = \frac{8\pi^2 Kl}{T^2}.$$

Setzen wir diesen Werth in (12) ein, so wird daraus:

$$(13) \quad L = \frac{\pi^3 R^4 B T^2}{2 \cdot 8 \cdot \pi^2 \cdot Kl} = \frac{\pi R^4 B T^2}{16 Kl}, \quad \text{wonach sich:}$$

$$(14) \quad B = \frac{16 L Kl}{\pi R^4 T^2}$$

leicht berechnen lässt.

Für die vorliegenden Untersuchungen war nun R , l und K constant. Führen wir deshalb zur Abkürzung die Grösse:

$$c = \frac{\pi R^4 B}{16 Kl}$$

ein, so folgt aus der Boltzmann'schen Theorie zunächst, dass für einen bestimmten Draht:

$$(15) \quad L = c T^2$$

sein muss. Von dieser Gleichung kommt man leicht auf diejenige, welche der Tabelle III zu Grunde liegt, wenn man sich die Grösse B oder auch, da K , l und R constant sind,

den Werth L/T^2 bildet. Dieser sollte nach der Theorie constant sein. Es ergibt sich aber thatsächlich ein absteigender Werth bei aufsteigendem T , wie aus folgender Tabelle ersichtlich ist (Vergleiche auch Tabelle II).

Tabelle V.

| $L \cdot 10^4$ | T | $(L \cdot 10^4) : T^2$ |
|----------------|---------------|------------------------|
| Kupfer. | Länge: 100 cm | Durchmesser: 0,027 cm |
| 89,221 | 10,798 | 0,765 90 |
| 159,971 | 15,54 | 0,662 43 |
| Silber. | Länge: 100 cm | Durchmesser: 0,027 cm |
| 24,401 | 10,03 | 0,242 56 |
| 41,191 | 13,275 | 0,233 73 |
| 55,281 | 15,73 | 0,223 42 |
| Eisen. | Länge: 100 cm | Durchmesser: 0,027 cm |
| 11,981 | 6,805 | 0,258 79 |
| 15,126 | 8,027 | 0,234 76 |
| 21,491 | 10,07 | 0,211 93 |
| Platin. | Länge: 100 cm | Durchmesser: 0,027 cm |
| 7,524 | 7,058 | 0,151 04 |
| 12,331 | 9,455 | 0,137 94 |
| 31,541 | 16,07 | 0,122 13 |
| Messing. | Länge: 100 cm | Durchmesser: 0,027 cm |
| 7,481 | 8,903 | 0,094 380 |
| 12,676 | 12,019 | 0,087 752 |
| 20,861 | 15,61 | 0,085 612 |
| Neusilber. | Länge: 100 cm | Durchmesser: 0,027 cm |
| 5,471 | 7,84 | 0,089 008 |
| 8,851 | 10,77 | 0,076 305 |
| 11,391 | 12,86 | 0,068 879 |
| 16,041 | 15,653 | 0,065 472 |
| 31,961 | 23,663 | 0,057 080 |

Schreibt man Gleichung (13) in der Form:

$$L = a \cdot B T^2, \quad \text{wo} \quad a = \frac{\pi R^4}{16 K l}$$

wäre, und führt man entsprechend dieser Tabelle für B den mit T variablen Werth:

$$B = \frac{\beta}{T} + \gamma$$

ein, so geht die Gleichung über in:

$$L = a \left(\frac{\beta}{T} + \gamma \right) T^2 = a\beta T + a\gamma T^2,$$

oder wenn man:

$$(16) \quad \begin{aligned} a \cdot \beta &= a; & a \cdot \gamma &= b & \text{einführt:} \\ L &= aT + bT^2. \end{aligned}$$

Die Constante A , welche zuerst in Gl. (6) auftritt, lässt sich nach der Gleichung:

$$L = \frac{\pi^3 R^4 B}{2(\pi R^4 A - 2lp)}$$

bestimmen. Setzen wir den Werth B ein, so geht nach einigen Reductionen diese Gleichung über in:

$$A = \frac{8\pi^2 Kl + 2T^2 \cdot lp}{\pi R^4 l^2}.$$

Endlich sei noch im Anschluss an diese Theorie eine Tabelle aufgestellt, in der $L \cdot 10^4$ berechnet nach den Gleichungen (15) und (16) einander gegenüber gestellt werden, neben dem beobachteten Werthe von L , um den Grad der Annäherung, wie er aus den Boltzmann'schen Formeln hervorgeht, schätzen zu können.

Die Schwingungsdauer ist dieselbe bei den entsprechenden L wie in der vorigen Tabelle. Die Länge bei allen Drähten 100 cm, der Durchmesser 0,027 cm.

Tabelle VI.

| $L \cdot 10^4$ ber. nach $L \cdot 10^4 = aT + bT^2$ cf. Tab. III. | $L \cdot 10^4$ beob. | $L \cdot 10^4$ ber. nach $L \cdot 10^4 = cT^2$ | c |
|---|----------------------|--|--------|
| Kupfer. $L \cdot 10^4 = 0,71417 T^2$ | | | |
| 89,220 | 89,221 | 83,204 | 0,7659 |
| 159,963 | 159,971 | 172,49 | 0,6624 |
| Silber. $L \cdot 10^4 = 0,2332 T^2$ | | | |
| 25,035 | 24,401 | 23,460 | 0,2426 |
| 41,186 | 41,191 | 41,100 | 0,2337 |
| 56,027 | 55,281 | 57,700 | 0,2234 |
| Eisen. $L \cdot 10^4 = 0,2351 T^2$ | | | |
| 11,897 | 11,981 | 10,887 | 0,2587 |
| 15,129 | 15,126 | 15,148 | 0,2348 |
| 21,284 | 21,491 | 23,840 | 0,2119 |
| Platin. $L \cdot 10^4 = 0,1370 T^2$ | | | |
| 7,534 | 7,524 | 6,8247 | 0,1510 |
| 12,352 | 12,331 | 12,247 | 0,1379 |
| 31,588 | 31,541 | 35,380 | 0,1222 |

| $L \cdot 10^4$ ber. nach $L \cdot 10^4 = aT + bT^2$ cf. Tab. III. | $L \cdot 10^4$ beob. | $L \cdot 10^4$ ber. nach $L \cdot 10^4 = cT^2$ | c |
|---|----------------------|--|---------|
| Messing. | | $L \cdot 10^4 = 0,08925 T^2$ | |
| 7,347 | 7,481 | 7,074 | 0,09438 |
| 12,670 | 12,676 | 12,892 | 0,08775 |
| 20,590 | 20,861 | 21,748 | 0,08561 |
| Neusilber. | | $L \cdot 10^4 = 0,07135 T^2$ | |
| 5,608 | 5,471 | 4,386 | 0,08901 |
| 8,992 | 8,851 | 8,276 | 0,07631 |
| 11,836 | 11,391 | 11,800 | 0,06888 |
| 16,193 | 16,041 | 17,481 | 0,06547 |
| 32,217 | 31,961 | 39,950 | 0,05708 |

Man ersieht hieraus, dass die Annäherung, welche die Boltzmann'sche Theorie für die Beobachtung liefert, eine ziemlich grosse ist. Jedenfalls ist es deshalb wohl berechtigt, darauf hinzuweisen, dass das Boltzmann'sche Unternehmen nicht den „hohen Grad von Unbestimmtheit, welche zu Bedenken Anlass gibt,“ verdient, wie Hr. O. E. Meyer meinte.¹⁾

Wenden wir uns jetzt zurück von der Theorie zu den experimentellen Versuchen. Eine grössere Reihe von Beobachtungen über die Dämpfung der Torsionsschwingungen von verschiedenen Metalldrähten finden wir in der schon oben erwähnten Abhandlung von H. Streintz.²⁾ Da aber bei allen seinen Versuchen äussere Kräfte durch Einwirkung eines Magnetstabes nicht in Anwendung kamen, so liegt die Frage nahe: Wie weit stimmen jene Untersuchungen mit diesen überein?

Streintz findet aus seinen Versuchen, dass das logarithmische Decrement unabhängig sei

- 1) von der Schwingungsweite;
- 2) von der Spannung des Drahtes;
- 3) von der Schwingungsdauer, wenn die Aenderung derselben durch Aenderung des Trägheitsmomentes bewirkt wird;
- 4) von der Länge, dann vielleicht auch
- 5) vom Durchmesser des Drahtes, wenn man das Drehmoment entsprechend der Längenänderung sich verändern lässt;

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. 4. p. 257. 1878.

2) H. Streintz, Pogg. Ann. 153. p. 397. 1874; Wien. Ber. 69. p. 337. 1874.

6) dass L verschieden sei für verschiedene Metalle und für dasselbe Metall im ungeglühten und ausgeglühten Zustande. Im ersteren grösser, im letzteren kleiner;

7) dass L um so kleiner sei; je mehr Schwingungen der Draht bereits ausgeführt hat, und sich bei dieser Abnahme einer gewissen Grenze näherte (Accommodation);

8) dass L grösser bei höherer Temperatur sei, sodass man versucht sei, die Temperatur als einzige Ursache anzunehmen.

Diese Sätze erleiden zum Theil eine mehr oder weniger grosse Modification, wenn äussere Kräfte durch einen Magnet eingeführt werden.

Das erste Gesetz bleibt auch hier bestehen. Wenigstens glaube ich dies aus nachstehender Tabelle schliessen zu können. In dieser Tabelle gibt n die Anzahl der Schwingungen an, welche zwischen den einzelnen Beobachtungen verliefen. L_m bezeichnet, wie oben erwähnt, den Mittelwerth aus L_1 , L_3 und L_5 . φ bedeutet den Ausschlagswinkel in Scalentheilen. Die Länge ist bei allen Drähten 100 cm, der Durchmesser 0,027 cm. Für Eisen, Platin, Messing und Neusilber habe ich nur L_m und die anfängliche Scalendifferenz angegeben. Im übrigen sind die Grössen L_m auch für diese Metalle genau in derselben Weise entstanden, wie beim Kupfer und Silberdraht.

Tabelle VII.

| n | φ_r | φ_l | $\varphi_r - \varphi_l$ | $L \cdot 10^4$ | $L_m \cdot 10^4$ |
|---------|-------------|-------------|-------------------------|----------------|------------------|
| Kupfer. | | | | | |
| 20 | 742,20 | 269,55 | 472,65 | — | 96,30 |
| | 657,90 | 356,78 | 301,12 | 97,90 | |
| | 604,10 | 412,00 | 192,10 | 97,61 | |
| | 570,40 | 447,00 | 123,40 | 96,11 | |
| | 548,70 | 469,75 | 78,95 | 96,99 | |
| | 535,00 | 484,00 | 51,00 | 94,89 | |
| 10 | 669,00 | 372,35 | 296,65 | — | 91,22 |
| | 641,25 | 400,75 | 240,50 | 91,13 | |
| | 618,10 | 423,15 | 194,95 | 91,23 | |
| | 600,10 | 441,98 | 158,12 | 90,93 | |
| | 585,30 | 456,88 | 128,42 | 90,36 | |
| | 573,00 | 469,60 | 104,00 | 91,60 | |

| n | q_r | q_l | $q_r - q_l$ | $L \cdot 10^4$ | $L_m \cdot 10^4$ |
|------------|--------|--------|-------------|----------------|------------------|
| Silber. | | | | | |
| 10 | 726,00 | 286,00 | 440,00 | — | 43,48 |
| | 704,90 | 306,95 | 397,95 | 43,62 | |
| | 685,75 | 325,63 | 360,12 | 43,38 | |
| | 668,60 | 342,80 | 325,80 | 43,50 | |
| | 652,85 | 358,00 | 294,85 | 43,35 | |
| | 638,90 | 372,05 | 266,85 | 43,33 | |
| 10 | 654,25 | 355 | 299,25 | — | 43,79 |
| | 640,00 | 369,35 | 270,65 | 43,62 | |
| | 627,20 | 382,18 | 245,02 | 43,21 | |
| | 615,60 | 394,00 | 221,60 | 43,63 | |
| | 605,20 | 404,23 | 200,97 | 42,44 | |
| | 595,50 | 413,95 | 181,55 | 44,13 | |
| Eisen. | | | | | |
| 20 | 705,50 | 314,60 | 390,90 | — | 17,03 |
| 20 | 659,75 | 360 | 299,75 | — | 17,13 |
| Platin. | | | | | |
| 20 | 756,25 | 257,00 | 499,25 | — | 14,33 |
| 20 | 655,55 | 356,65 | 298,90 | — | 14,41 |
| Messing. | | | | | |
| 20 | 771,15 | 226,48 | 544,67 | — | 14,97 |
| 20 | 647,60 | 348 | 299,60 | — | 14,73 |
| Neusilber. | | | | | |
| 20 | 768,40 | 268,50 | 499,90 | — | 11,01 |
| 20 | 666,00 | 366,55 | 299,45 | — | 10,94 |

Was übrigens die relativ grosse Differenz der beiden Mittelwerthe von L für den Kupferdraht betrifft, so muss ich dazu bemerken, dass die erste Gruppe der Werthe q , denen $L_m \cdot 10^4 = 96,30$ entspricht, in der Zeit von 12^h 30 bis 12^h 50 beobachtet wurde. Der Draht kam dann vollständig zur Ruhe, und erst am Nachmittage von 3^h bis 3^h 10 wurde die zweite Gruppe q beobachtet. Ihnen entspricht der Werth $L_m \cdot 10^4 = 91,22$.

Bei allen anderen Drähten wurden beide Gruppen unmittelbar hinter einander beobachtet, ohne dass der Draht erst zur Ruhe kam. Es lässt sich daher das grössere Herabsinken des logarithmischen Decrementes für den ersten Draht aus der Erscheinung der Accomodation¹⁾ erklären, eine Erscheinung, die auch bei den übrigen in geringem Maasse zu constatiren war. Der Magnetismus kann hierbei

1) H. Streintz, Pogg. Ann. 153. p. 390. 1874.

von gar keinem Einfluss sein, denn nachdem die Drähte bei verschiedener Schwingungsweite untersucht waren, wurde die Schwingungsdauer durch Annäherung des Magnetstabes verändert; zum Schlusse aber jedesmal noch ein Versuch angestellt nach Entfernung des Magnetstabes. Stellen wir diese beiden Versuchsreihen gegenüber, so ergibt sich nachstehende Tabelle, in der m die ungefähre Anzahl der Schwingungen bedeutet, welche der Draht zwischen diesen beiden Gruppen ausgeführt hatte. Für Eisen, Platin, Messing und Neusilber sind analoge Abkürzungen vorgenommen, wie in der vorigen Tabelle.

Tabelle VIII.

| m | n | q_r | q_l | $q_r - q_l$ | $L \cdot 10^4$ | $L_m \cdot 10^4$ |
|------------|-----|--------|--------|-------------|----------------|------------------|
| Kupfer. | | | | | | |
| 60 | 10 | 669,00 | 372,35 | 296,65 | conf. Tab. VII | 91,22 |
| | | 573,00 | 469,00 | 104,00 | | |
| | | 667,00 | 366,5 | 300,5 | | |
| | 10 | 638,2 | 395,25 | 242,95 | 92,32 | 91,10 |
| | 10 | 615 | 417,5 | 197,5 | 89,95 | |
| | 10 | 596,15 | 436,05 | 160,1 | 91,18 | |
| | 11 | 579,85 | 452,43 | 127,42 | 90,14 | |
| | 10 | 567,80 | 464,18 | 103,62 | 89,80 | |
| Silber. | | | | | | |
| 170 | 10 | 654,25 | 355 | 299,25 | conf. Tab. VII | 43,79 |
| | | 587,25 | 422,08 | 165,17 | | |
| | | 730,3 | 431 | 299,3 | | |
| | 10 | 716,3 | 445,65 | 270,65 | 43,70 | 43,40 |
| | | 703,0 | 458,7 | 244,3 | 44,49 | |
| | | 691,2 | 470,33 | 220,87 | 43,78 | |
| | | 680 | 480,78 | 199,22 | 44,81 | |
| | | 671,5 | 490,95 | 180,55 | 42,73 | |
| Eisen. | | | | | | |
| 250 | 20 | 659,75 | 360 | 299,75 | — | 17,13 |
| | 30 | 658,6 | 359,45 | 299,15 | — | 17,08 |
| Platin. | | | | | | |
| 220 | 20 | 655,55 | 356,65 | 298,9 | — | 14,41 |
| | 20 | 657,75 | 358 | 299,75 | — | 14,38 |
| Messing. | | | | | | |
| 210 | 20 | 647,6 | 348 | 299,6 | — | 14,73 |
| | 20 | 647,75 | 347,58 | 300,17 | — | 14,82 |
| Neusilber. | | | | | | |
| 360 | 20 | 666 | 366,55 | 299,45 | — | 10,91 |
| | 20 | 558,95 | 358,65 | 300,3 | — | 10,88 |

Mit Ausnahme des Messingdrahtes hat das logarithmische Decrement bei allen anderen abgenommen. Beim Messingdraht scheint aber eine Störung eingetreten zu sein bei der Beobachtung der Werthe, aus denen $L_m \cdot 10^4 = 14,73$ hervorging, sodass diese Zahl zu klein angesetzt ist. Bei einem anderen Messingdrahte habe ich wenigstens die Abnahme des logarithmischen Decrementes mit der Anzahl der Schwingungen beobachten können.

Bei verschiedener Spannung habe ich diese Drähte nicht untersucht.

Was den dritten, vierten und fünften Gesichtspunkt betrifft, so ist schon erwähnt, dass unter der Einwirkung magnetischer Kräfte die Unabhängigkeit des logarithmischen Decrementes von l , R und besonders von der Schwingungsdauer T nicht zutrifft. Desgleichen ist schon der folgende Satz berührt worden, dass nämlich L verschieden für verschiedene Metalle und verschieden für dasselbe Metall im ungeglühten und ausgeglühten Zustande ist. Zur Uebersicht habe ich für sechs gleiche Drähte entsprechende Werthe von L und T zusammengestellt. $\varphi_r - \varphi_l$ ist für alle sechs Drähte gleich 300. Endlich bedeutet d die Differenz zweier Werthe von $L \cdot 10^4$ im ungeglühten und ausgeglühten Zustande.

Tabelle IX.

| Metall | | $L \cdot 10^4$ | d | T |
|-----------|-----------|----------------|-------|--------|
| Kupfer | ungeglüht | 91,10 | 72,43 | 10,905 |
| | geglüht | 18,67 | | 11,203 |
| Silber | ungeglüht | 43,40 | 12,85 | 13,26 |
| | geglüht | 30,55 | | 13,62 |
| Eisen | ungeglüht | 17,08 | 7,32 | 7,993 |
| | geglüht | 9,76 | | 8,01 |
| Platin | ungeglüht | 17,23 | 7,09 | 9,445 |
| | geglüht | 10,14 | | 9,426 |
| Messing | ungeglüht | 14,82 | 6,55 | 12,02 |
| | geglüht | 8,27 | | 10,148 |
| Neusilber | ungeglüht | 10,88 | 2,24 | 10,73 |
| | geglüht | 8,64 | | 10,45 |

Hervorzuheben ist an dieser Stelle wohl, dass diese Grössen *d* genau dieselbe Reihenfolge einschlagen, wie die logarithmischen Decremente der Drähte im ungeglühten Zustande.

Somit komme ich zur letzten These, da 7) schon bei 1) Erledigung gefunden hat. Von der Einwirkung der Temperatur kann bei diesen Untersuchungen ganz abgesehen werden. Denn das Zimmer, in dem beobachtet wurde, lag nach Norden, ferner wurden die letzten Drähte, die ich untersuchte, und die in dieser Arbeit nur behandelt sind, alle in der Zeit vom 6. bis 29. October vorigen Jahres untersucht. Während dieser Zeit schwankte das Thermometer in dem Beobachtungszimmer zwischen 9,4 und 14,5° Celsius. Die grösste Temperaturdifferenz, die bei der Untersuchung ein und desselben Drahtes zu verzeichnen war, betrug 2,5°. Bei der Untersuchung der meisten Drähte war diese Differenz aber kleiner als 0,8°, sodass von einer grösseren Einwirkung der Temperatur wohl abgesehen werden kann.

Interessant wäre es allerdings, eine Anzahl verschiedener Metalldrähte, die alle auf ebendieselbe Weise wie die vorgeführten präparirt sein müssten, bei verschiedener Temperatur zu prüfen, während die Torsion durch einen Magnetstab bewirkt wird. Doch liegt die Beantwortung dieser Frage ganz ausserhalb des Rahmens dieser Arbeit.

Stellen wir die gewonnenen Resultate zum Schlusse noch einmal kurz zusammen. Es ergab sich, dass das logarithmische Decrement, wenn die Torsion des Drahtes durch einen Magnetstab herbeigeführt wird,

1) abhängig ist von der Schwingungsdauer, wenn die Aenderung derselben bei constantem Trägheitsmoment durch einen aufgestellten Magnetstab bewirkt wird, und zwar ist das Abhängigkeitsverhältniss bestimmt durch die Gleichung:

$$L = aT + bT^2.$$

Die Boltzmann'sche Theorie ergab für einen bestimmten Draht die Gleichung:

$$L = cT^2, \quad \text{wo: } c = \frac{\pi R^4 B}{16 Kl}$$

ist, R den Radius des Drahtes, K das Trägheitsmoment, und l die Länge bedeutet.

2) im ungeglühten Zustande grösser ist, wie im ausgeglühten. Ist L für einen Draht im ungeglühten Zustande nach der Formel:

$$L = a_1 T + b_1 T^2$$

berechnet, so ergibt sich für diesen Draht im ausgeglühten Zustande die Relation:

$$L = n(a_1 T + b_1 T^2);$$

3) verschieden ist, für verschiedene Metalle, sodass sich die untersuchten Metalle nach ihrer Dämpfungsstärke in die Reihe ordnen:

Kupfer, Silber, Eisen, Platin, Messing, Neusilber;

4) unabhängig ist von der Schwingungsweite;

5) um so kleiner ist, je mehr Schwingungen der Draht bereits ausgeführt hat und sich bei dieser Abnahme einer bestimmten Grenze nähert.

Der experimentelle Theil dieser Arbeit wurde im physikalischen Institute der Universität Greifswald unter der Leitung des Hrn. Prof. Dr. A. Oberbeck ausgeführt. Für die mannigfachen Rathschläge, die mir während der Untersuchungen von dem Herrn Professor zu Theil wurden, spreche ich demselben an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus. Auch dem Assistenten des Institutes, Hrn. Dr. Bergmann, sage ich für sein freundliches Entgegenkommen bei der Anfertigung des Apparates meinen besten Dank.

Greifswald, Physikal. Inst. d. Univ., d. 11. Mai 1888.

VII. *Ueber das Wärmeleitungsvermögen
der Mischungen von Aethylalkohol und Wasser*¹⁾;
von Hugo Henneberg.

(Hierzu Taf. II Fig. 5.)

Im Jahre 1880 hat Hr. H. F. Weber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten nach einer Methode untersucht, bei welcher die Strömungen innerhalb der Flüssigkeit gänzlich vermieden sind. Als das Resultat dieser Untersuchung stellte Weber folgendes einfache Gesetz auf:

Der Quotient aus der Wärmeleitung und der specifischen Wärme der Volumeneinheit hat für alle Flüssigkeiten denselben Werth.

In einer späteren Arbeit hat Hr. Weber eine Modification dieses Gesetzes eintreten lassen, auf welche später eingegangen wird. Nach Weber sind von Christiansen und Grätz Untersuchungen über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten angestellt worden. Durch diese Untersuchungen ist der von Hrn. Weber entdeckte Zusammenhang zwischen Wärmeleitung und specifischer Wärme der Volumeneinheit bestätigt worden, wenn auch die Resultate der einzelnen Beobachter für die gleiche Substanz noch Differenzen aufweisen.

Infolge dieses genannten Zusammenhanges zwischen der Wärmecapacität und der Wärmeleitung schien es nicht uninteressant, die Mischungen von Aethylalkohol und Wasser auf ihre Wärmeleitungsfähigkeit hin zu untersuchen; denn diese Mischungen zeigen in Bezug auf die specifische Wärme ein anomales Verhalten, indem sich für die alkoholärmeren Mischungen bis zu einem Alkoholgehalte von 35 Gewichtsprocenten für die Wärmecapacität Werthe ergeben, die grösser als Eins sind, während absoluter Alkohol eine viel geringere specifische Wärme als Wasser besitzt.

Es stellte sich also die Aufgabe dar, zu untersuchen: erstens: ob dieses anomale Verhalten der Mischungen von Alkohol und Wasser auch in den Werthen für die Leitungsfähigkeit für Wärme zum Ausdruck komme, und

1) Auszug aus einer in Jena eingereichten Dissertation.

zweitens: ob für die so gefundenen Werthe die von Weber gefundene Relation in derselben Weise Geltung habe.

§ 1. Methode.

Die Methode war im wesentlichen dieselbe, wie die von Hrn. Christiansen¹⁾ angewendete, nur wurde dem Apparat dieselbe Einrichtung gegeben, welche Hr. Winkelmann²⁾ zur Untersuchung der Abhängigkeit der Wärmeleitung der Gase von der Temperatur benutzt hat. Zur Aufnahme der Kupferplatten diente ein Kasten aus Eisenblech von 65 cm Seitenlänge und mit Glasscheiben versehenen Seitenwänden von 25 cm Höhe. Derselbe wurde oben durch einen Deckel aus Eisenblech geschlossen, der in der Mitte eine kreisrunde Oeffnung von 17 cm Durchmesser besass. Im Centrum der Bodenfläche war eine sorgfältig eben geschliffene Messingplatte von 15,8 cm Durchmesser eingelöthet. Auf diese wurden die noch näher zu beschreibenden Kupferplatten mit den dazwischen liegenden Glasplättchen aufgeschichtet und auf die oberste Platte ein cylindrisches Siedegefäss von 15,8 cm Durchmesser und 24 cm Höhe durch die kreisrunde Oeffnung im Deckel aufgesetzt. Dieses Gefäss war aus Messing, an seiner Bodenfläche ebenfalls möglichst glatt abgeschliffen und ragte ungefähr 8 cm über den Deckel des Apparates heraus. Es trug einen streng passenden Deckel mit zwei Löchern. Durch das eine Loch war ein kupfernes Rohr, welches im Inneren mehrere schraubenförmige Windungen machte und bis auf den Boden reichte, zur Einleitung des Dampfes eingeführt; die Oeffnung war etwas weiter als das Rohr, sodass dieses nur ganz lose darin steckte, eine Einrichtung, die den Zweck hatte, die Uebertragung etwaiger Erschütterungen auf das Siedegefäss und damit auf die Kupferplatten zu verhindern. Durch das andere Loch konnte der Dampf entweichen. Das Kupferrohr war durch einen Kautschukschlauch mit einem etwas oberhalb neben dem ganzen Apparate stehenden Dampfentwicklungsgefässe verbunden.

1) Christiansen, Wied. Ann. 14. p. 23. 1881.

2) Winkelmann, Wied. Ann. 29. p. 68. 1886.

Die drei zur Verwendung gekommenen Kupferplatten I, II, III hatten folgende Dimensionen:

| | I. | II. | III. |
|-------------|-------|-------|----------|
| Durchmesser | 15,80 | 15,80 | 15,80 cm |
| Dicke . . . | 1,40 | 1,40 | 1,39 „ |

Die Platten waren sorgfältig glatt geschliffen und stark vergoldet und hatten seitlich 5 cm tiefe und 0,6 cm weite Bohrungen zur Einführung der Thermometer.

Die Beobachtung der Temperatur an den drei Thermometern, die alle drei übereinander in der Richtung einer Diagonale des Kastens angeordnet waren, geschah aus einiger Entfernung vermittelt eines Fernrohres.

Zur Beobachtung der Temperatur der Umgebung der Platten befanden sich im Inneren des Kastens drei Thermometer, wovon eines in 0,1 Grade, die beiden anderen in ganze Grade getheilt waren. Sie waren so vertheilt, dass sich das eine mit seinem Quecksilbergelass nahe an der äusseren Glaswand des Kastens, das zweite ungefähr in der Mitte zwischen dieser und den Kupferplatten und das dritte mit seinem Gefass ganz nahe an den Kupferplatten befand. Alle drei waren horizontal und genau in der Höhe der mittleren Kupferplatte (II) aufgestellt.

Es wurde natürlich auch dafür Sorge getragen, den Apparat in möglichst derselben Temperatur zu erhalten und vor Erwärmung von aussen durch Strahlung zu schützen. Die Versuche wurden daher in einem Souterrainlocale des physikalischen Instituts angestellt und für möglichst constante Temperatur der Umgebung Sorge getragen. Gegen etwaige Strahlung von dem Dampfentwickelungsgelass aus wurde der Apparat durch einen Pappschirm geschützt, und überdies befand sich dasselbe viel höher als der Apparat. Bei denjenigen Versuchen, bei welchen die Thermometer künstlich beleuchtet wurden, wurde zwischen die zur Beleuchtung dienende Lampe und den Apparat ein Schirm eingeführt, der aus zwei ungefähr 8 cm voneinander entfernten Glastafeln bestand, die so aufgestellt waren, dass zwischen ihnen die Luft frei nach allen Seiten circuliren konnte.

Die zur Verwendung kommenden Glasplättchen waren

in vier verschiedenen Dicken hergestellt von im Mittel 0,2014, 0,1051, 0,0495 und 0,0243 cm. Die Abweichungen von diesen Mittelwerthen betrugen nicht mehr als 0,001 cm.

Die Mischungen wurden aus destillirtem Wasser und absolutem Alkohol von 99,5 Proc. hergestellt, und zwar mit einem von zehn zu zehn Gewichtsprocenten fortschreitenden Alkoholgehalt. Das specifische Gewicht der so erhaltenen neun Mischungen wurde mit der Mohr'schen Flüssigkeitswaage und zur Controlle bei einigen mit dem Pyknometer bestimmt und findet sich in folgender Tabelle zusammengestellt. Die unter der Rubrik p stehenden Zahlen bedeuten fortan immer den Alkoholgehalt der Mischung in Gewichtsprocenten.

| p | ^s mit der Mohr'schen Waage Temp. 15,5° | ^s mit d. Pyknometer Temp. 17,5° |
|-----|--|--|
| 10 | 0,9835 | 0,9840 |
| 20 | 0,9710 | — |
| 30 | 0,9575 | — |
| 40 | 0,9405 | 0,9396 |
| 50 | 0,9193 | — |
| 60 | 0,8965 | — |
| 70 | 0,8742 | 0,8734 |
| 80 | 0,8580 | — |
| 90 | 0,8245 | 0,8235 |

§ 2. Berechnung der Versuche.

Die drei Thermometer, welche zur Einführung in die drei Kupferplatten bestimmt waren, hatten an ihrem unteren cylindrischen Ende einen Durchmesser von etwa 0,5 cm auf eine Länge von 5 cm; dann erweiterte sich das äussere Rohr, und von diesem Punkte an begann die Scala. Die ganze Länge der Thermometer betrug zwischen 36 und 40 cm, die Länge der Quecksilbergefässe 2,0 bis 2,5 cm. Das für die oberste Platte bestimmte reichte von 35 bis 75° und war in 0,2 Grade getheilt, das zweite von 10 bis 40° in 0,1 Grade getheilt und das dritte von -5° bis +25° in 0,2 Grade getheilt. Die cylindrischen Gefässe der Thermometer waren bis auf eine Länge von 5 cm mit feinem Kupferdraht umwickelt, damit sie streng in die Löcher der Plattenpassten.

Diese drei Thermometer wurden sorgfältig vor und nach den damit angestellten Versuchen mit einem im hiesigen physikalischen Institute vorhandenen Normalthermometer, dessen Angaben von der kaiserlichen Normalaichungscommission in Berlin geprüft sind und überdies auf das Luftthermometer reducirt wurden, verglichen.

Bezeichnet man die Platten mit I, II und III, und nimmt man an, dass der Zwischenraum zwischen Platte I und II mit Luft, deren Wärmeleitungsvermögen als bekannt vorausgesetzt wird, und auf welche die Leitungsfähigkeit der zu untersuchenden Flüssigkeit bezogen wird, der Zwischenraum zwischen Platte II und III mit der betreffenden Flüssigkeit gefüllt sei, so wird, nachdem durch längere Zeit hindurch der obersten Platte Wärme zugeführt und die unterste von der Wasserleitung gekühlt wird, ein stationärer Zustand eintreten, d. h. es wird, wenn man zunächst von der Wärmeabgabe der mittleren Platte nach aussen absieht, dieselbe Wärmemenge, die von Platte I nach Platte II fliesst, auch von dieser letzteren nach Platte III fließen, und daher sowohl die Temperatur der mittleren Platte, als auch die der oberen und unteren constant bleiben. Es seien dann T_1 , T_2 und T_3 die respectiven Temperaturen der Kupferplatten I, II und III, die Entfernung zwischen Platte I und II sei e_1 , die zwischen II und III e_2 . k_1 die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft, k_2 die Leitungsfähigkeit der zu untersuchenden Flüssigkeit im unteren Zwischenraume, S endlich der kreisförmige Querschnitt einer Kupferplatte, so erhält man, wie Hr. Christiansen¹⁾ gezeigt hat, folgende Gleichung:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} S k_1 \left(1 + \frac{T_1 + T_2}{2} \alpha_1 \right) \frac{T_1 - T_2}{e_1} - h A (T_2 - T_0) \\ = S k_2 \left(1 + \frac{T_2 + T_3}{2} \alpha_2 \right) \frac{T_2 - T_3}{e_2} \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet α_1 den Temperaturcoefficienten der Luft, α_2 den Temperaturcoefficienten der Flüssigkeit.

Hieraus folgt:

1) Christiansen, Wied. Ann. 14. p. 26. 1881.

$$(2) \quad \left| \frac{k_2 \left(1 + \frac{T_2 + T_3}{2} \alpha_2 \right)}{k_1} = \left(1 + \frac{T_1 + T_2}{2} \alpha_1 \right) \cdot \frac{e_2 (T_1 - T_3)}{e_1 (T_2 - T_3)} \left[1 - \frac{h A e_1 (T_2 - T_0)}{S k_1 \left(1 + \frac{T_1 + T_2}{2} \alpha_1 \right) (T_1 - T_2)} \right] \right|$$

Durch die Formel:

$$\frac{k_2 \left(1 + \frac{T_2 + T_3}{2} \alpha_2 \right)}{k_1} = K$$

ist das Verhältniss der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit für die betreffende Temperatur, bei der sie untersucht wurde, zur Leitungsfähigkeit der Luft gegeben. Nach dieser Gleichung (2) wurden die relativen, auf Luft = 1 bezogenen Werthe K der untersuchten Mischungen berechnet und angenommen, dass für den Fall, der ziemlich oft eintrat, dass die Temperatur der Umgebung T_0 grösser war als die Temperatur T_2 der mittleren Platte, wodurch der Ausdruck in der Klammer grösser als 1 wird, die äussere Wärmeleitungsfähigkeit h dieselbe bleibt, und von der mittleren Platte eine ebenso grosse Wärmemenge aufgenommen wird, als im entgegengesetzten Falle, wo $T_2 > T_0$, abgegeben. Für α wurde der von Hrn. Winkelmann¹⁾ gefundene Werth $\alpha_1 = 0,00206$, für h der von ihm in derselben Abhandlung ermittelte Werth $h = 0,03145$ und für k_1 der Werth $k_1 = 0,0525$ eingesetzt. Für die anderen vorkommenden Grössen ergibt sich aus den früher erwähnten Dimensionen $A = 69,48$ qcm und $S = 196,03$ qcm, und daher ist der für alle Versuche gleich bleibende Quotient:

$$\frac{h A}{S k_1} = 0,978.$$

§ 3. Beschreibung der Versuche.

Die einzelnen Versuche verliefen in folgender Weise: Nachdem der Apparat zusammengestellt und die Flüssigkeit eingefüllt war, wurde in das Siedegefäss Dampf einströmen gelassen und von unten durch Wasser gekühlt. Das untere Thermometer in Platte III nahm dann nach sehr kurzer

1) Winkelmann, Wied. Ann. 29. p. 101. 1886.

Zeit einen constanten Stand an und blieb auch, da das Zuströmen des Wassers sehr gleichmässig erfolgte, während fast des ganzen Versuchs sehr constant. Im oberen Gefäss, welches, wie schon erwähnt, durch eine Luftschicht von je nach Bedarf 0,1 oder 0,05 cm von der obersten Platte I getrennt war, condensirte sich zuerst der einströmende Dampf, der weiter folgende durchströmte dieses Condensationswasser und erhielt es auf constanter Siedetemperatur. Darauf nahm auch die Platte I eine constante Temperatur an. Am längsten stieg die Temperatur der Platte II, und erst wenn diese nur geringe oder gar keine Schwankungen zeigte, war der stationäre Zustand eingetreten. Es wurden nun mit Hülfe des Fernrohrs Ablesungen der drei Temperaturen T_1 ; T_2 , T_3 von zwei zu zwei Minuten gemacht und auch ungefähr alle acht bis zehn Minuten die Temperatur der Umgebung an den drei Thermometern im Inneren des Kastens abgelesen. Um den Eintritt des stationären Zustandes genau zu präcisiren, wurden die Differenzen $\Delta_1 - \Delta_2$ gebildet, wenn $\Delta_1 = T_1 - T_2$, $\Delta_2 = T_2 - T_3$ ist. Waren die Differenzen $\Delta_1 - \Delta_2$ und die Temperatur T_1 und T_3 möglichst constant, so wurden diese Ablesungen zur Berechnung verwendet. Dieser stationäre Zustand dauerte durchschnittlich sechs bis zehn Minuten, bei den alkoholreicheren Mischungen kürzer als bei den alkoholärmeren. Hierauf nahmen nicht, wie zu erwarten war, die drei Temperaturen wieder ab, sondern die Temperatur der mittleren Platte stieg noch weiter, was dadurch zu erklären ist, dass eine theilweise, nach längeren Versuchen auch deutlich sichtbare Verdampfung der Flüssigkeit eintrat. Diese bedingte eine Abnahme der Leitungsfähigkeit der Zwischenschicht, weil der Querschnitt der Flüssigkeit kleiner wurde, und hierdurch wurde eine Temperaturerhöhung der mittleren Platte veranlasst. Manchmal trat auch nach kurzem Steigen des mittleren und auch theilweise der beiden anderen Thermometer ein zweites mal ein stationärer Zustand ein, und es wurden dann aus beiden Gruppen von Ablesungen wenig differirende Werthe gewonnen und aus beiden das Mittel genommen.

Zunächst will ich eine fortlaufende Versuchsreihe mit-

theilen. Bei dieser Versuchsreihe war oberhalb der Platte I noch eine Luftschicht von 0,05 cm. Die Entfernung zwischen I und II, d. h. die Dicke der Glasplättchen war $e_1 = 0,0496$ cm. Für den Zwischenraum zwischen II und III betrug sie $e_2 = 0,1050$ cm.

In den folgenden zwei Tabellen, von denen sich die erste auf reines Wasser, die zweite sich auf eine zehnprocentige Mischung bezieht, enthält die erste Columnne die Zeit in Minuten, dann folgen die drei Ablesungen der Umgebungstemperatur, ferner die Temperaturen T_1, T_2, T_3 der Platten I, II, III, die Differenzen $A_1 = T_1 - T_2, A_2 = T_2 - T_3$ und die Differenz $A_1 - A_2$. Am Fusse sind die Mittelwerthe angegeben, und unter diesen dieselben Werthe mit Rücksicht auf die Thermometer corrigirt. Unterhalb sind dann noch die mittleren Temperaturen der Luft und der Flüssigkeit $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ und $\frac{1}{2}(T_2 + T_3)$ angegeben, sowie der für K gewonnene Werth. Wo ein Versuch zwei Berechnungen ermöglichte, sind beide angegeben.

Versuch 76.

Wasser.

7. December 1887.

| t | T_0 | | | T_1 | T_2 | T_3 | A_1 | A_2 | $A_1 - A_2$ |
|--------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| m | | | | | | | | | |
| 0 | | | | 54,76 | 14,01 | 9,40 | 40,75 | 4,61 | 36,14 |
| 2 | | | | 54,76 | 14,01 | 9,40 | 40,75 | 4,61 | 36,14 |
| 4 | 18,0 | 18,0 | 18,4 | 54,76 | 14,01 | 9,40 | 40,75 | 4,61 | 36,14 |
| 6 | | | | 54,77 | 14,01 | 9,40 | 40,76 | 4,61 | 36,15 |
| 8 | | | | 54,76 | 14,01 | 9,40 | 40,75 | 4,61 | 36,14 |
| Mittel | | | | 54,76 | 14,01 | 9,40 | 40,75 | 4,61 | |
| corr. | | 18,13 | | 54,61 | 13,71 | 9,33 | 40,90 | 4,38 | |

$$\frac{1}{2}(T_1 + T_2) = 34,16.$$

$$\frac{1}{2}(T_2 + T_3) = 11,52,$$

$$K = 22,19.$$

Versuch 75.

 $p = 10.$

7. December 1887.

| t | T_0 | | | T_1 | T_2 | T_3 | A_1 | A_2 | $A_1 - A_2$ |
|--------|-------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| m | | | | | | | | | |
| 0 | 18,8 | 18,9 | 19,0 | 55,20 | 14,69 | 9,60 | 40,51 | 5,09 | 35,42 |
| 2 | | | | 55,20 | 14,69 | 9,60 | 40,51 | 5,09 | 35,42 |
| 4 | | | | 55,20 | 14,69 | 9,60 | 40,51 | 5,09 | 35,42 |
| 6 | | | | 55,21 | 14,70 | 9,60 | 40,51 | 5,10 | 35,41 |
| 8 | | | | 55,21 | 14,70 | 9,60 | 40,51 | 5,10 | 35,41 |
| Mittel | | | | 55,20 | 14,69 | 9,60 | 40,51 | 5,09 | |
| corr. | | 18,9 | | 55,05 | 14,99 | 9,52 | 40,66 | 4,87 | |

$$\frac{1}{2}(T_1 + T_2) = 34,72.$$

$$\frac{1}{2}(T_2 + T_3) = 11,95.$$

$$K = 20,01.$$

Die Resultate dieser Versuchsreihe sind in der folgenden Tabelle enthalten, t bedeutet die Temperatur der Flüssigkeit $\frac{1}{2}(T_2 + T_3)$.

Tabelle I.

| p | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | $T_1 - T_2$ | $T_2 - T_3$ | t | K |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-------|-------|
| 0 | 18,13 | 54,61 | 13,71 | 9,33 | 40,90 | 4,38 | 11,52 | 22,19 |
| 10 | 18,00 | 54,85 | 14,34 | 9,50 | 40,51 | 4,84 | 11,92 | 19,96 |
| | 18,90 | 55,05 | 14,39 | 9,52 | 40,66 | 4,87 | 11,95 | 20,01 |
| 20 | 19,35 | 55,05 | 15,02 | 9,66 | 40,03 | 5,36 | 12,34 | 17,81 |
| 30 | 20,00 | 54,85 | 15,20 | 9,33 | 39,65 | 5,87 | 12,26 | 16,17 |
| | 20,28 | 55,25 | 15,38 | 9,46 | 39,87 | 5,92 | 12,42 | 16,15 |
| 40 | 18,13 | 55,44 | 16,09 | 9,66 | 39,35 | 6,43 | 12,87 | 14,23 |
| | 18,36 | 55,15 | 16,17 | 9,68 | 38,98 | 6,49 | 12,92 | 13,98 |
| 50 | 18,93 | 55,87 | 16,69 | 9,17 | 39,18 | 7,52 | 12,93 | 12,17 |
| 60 | 18,40 | 56,05 | 17,51 | 9,17 | 38,54 | 8,34 | 13,34 | 10,63 |
| 70 | 18,77 | 57,10 | 18,68 | 9,55 | 38,42 | 9,13 | 14,11 | 9,60 |
| 80 | 19,60 | 57,70 | 19,72 | 9,26 | 37,98 | 10,46 | 14,49 | 8,29 |
| 90 | 18,00 | 58,30 | 20,86 | 9,21 | 37,44 | 11,65 | 15,03 | 7,11 |
| 100 | 18,43 | 57,28 | 20,41 | 8,10 | 36,87 | 12,31 | 14,25 | 6,68 |

Die Werthe K stellen das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeit bei der Temperatur t (obige Tabelle, vorletzte Columne) bezogen auf Luft von 0° als Einheit dar.

In sämtlichen Versuchen sind die Temperaturen T_1 und T_3 der obersten und untersten Platte ziemlich unveränderlich, auch die Temperatur der mittleren Platte schwankt bei allen Versuchen (mit Ausnahme eines einzigen, wo die Schwankung 0,09° beträgt) um nicht mehr als 0,06°. Die

Temperatur der Umgebung variirt sehr wenig, nur zwischen 18 und 20°, und auch die Temperaturen der Mischungen, auf welche sich die Werthe der Wärmeleitungsfähigkeit beziehen, liegen in einem Intervalle von vier Grad, nämlich 11 bis 15°.

Die Dauer des stationären Zustandes ist im Durchschnitt sechs bis zehn Minuten, bei den alkoholreicheren Mischungen ist sie etwas kürzer, weil hier der Einfluss der Verdampfung sich früher geltend macht, immerhin aber lang genug, um eine sichere Berechnung zu ermöglichen. Um hierin ganz sicher zu gehen, wurde beispielsweise beim absoluten Alkohol, bei welchem der Einfluss der Verdampfung am grössten ist, und dessen Untersuchung überhaupt die meisten Schwierigkeiten bietet, der Versuch in doppelter Weise angestellt. Zuerst wurde ein Versuch wie gewöhnlich angestellt, indem man Wasserkühlung und Dampfzuleitung zu gleicher Zeit in Gang setzte, sodass die Temperaturen aller drei Platten bis zum Eintritt des stationären Zustandes continuirlich stiegen. Das zweite mal wurde die Wasserkühlung noch vor dem Eintritt des stationären Zustandes abgestellt, sodass nun alle drei Thermometer über ihren gewöhnlichen Stand hinausstiegen. Dann wurde die Wasserkühlung wieder in Gang gesetzt, und die Temperaturen sanken bis auf einen constanten Stand. Auf diese Weise wurde der Werth in zwei Grenzen eingeschlossen, und beide Versuche lieferten ziemlich gut übereinstimmende Resultate, nämlich für K 6,58, resp. 6,45.

Ausser dieser bereits angeführten Versuchsreihe habe ich noch weitere vier Versuchsreihen angestellt, einestheils um noch weiteres Beobachtungsmaterial zu gewinnen, anderentheils um die Methode daraufhin zu prüfen, ob die Resultate unabhängig seien:

1. von der absoluten Entfernung e_2 , d. h. von der Dicke der Flüssigkeitsschicht,
2. von dem Verhältniss der Entfernungen $e_1:e_2$.

Aus der folgenden Zusammenstellung erkennt man, dass die Dicke der Flüssigkeitsschicht keinen wesentlichen Einfluss hat auf die Bestimmung von K . Bei der ersten Ver-

suchsreihe ist die Dicke der Flüssigkeit $e_2 = 0,1050$ cm, bei der zweiten nur etwa halb so gross, nämlich 0,0496. Trotzdem geben beide Beobachtungen gut übereinstimmende Werthe; die Unterschiede sind nicht grösser, als sie auch bei zwei Versuchsreihen, die unter gleichen Umständen angestellt sind, vorkommen.

| p | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|
| $e_1 = 0,0496$ | 22,19 | 19,98 | 17,81 | 16,16 | 14,15 | 12,17 | 10,63 | 9,60 | 8,29 | 7,11 |
| $e_2 = 0,1050$ | | | | | | | | | | |
| $e_1 = 0,0246$ | 22,18 | 20,17 | 18,01 | 16,31 | 13,97 | 12,06 | 10,36 | 9,13 | 8,34 | 6,86. |
| $e_2 = 0,0496$ | | | | | | | | | | |

Ebenso habe ich auch nachgewiesen, dass die Methode von dem Verhältnisse der Abstände e_1 und e_2 unabhängig ist. Zu diesem Zweck wurde eine Versuchsreihe angestellt, bei der sich $e_1 : e_2$ ungefähr wie 1:4 verhalten. Eine Vergleichung dieser Reihe mit einer anderen, bei der das Verhältniss der Entfernungen 1:2 ist, ergibt im Mittel eine Differenz von 1,3 Proc.

Das Mittel sämmtlicher Beobachtungen enthält die folgende

Tabelle II.

| p | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|
| K | 21,97 | 19,99 | 17,88 | 16,07 | 13,97 | 11,99 | 10,45 | 9,16 | 8,24 | 7,04 | 6,61. |

Es erübrigt noch, die von mir erhaltenen Resultate mit anderen bereits gefundenen Werthen zu vergleichen, und da es sich um relative, auf Luft bezogene Werthe handelt, so sind in erster Linie die Resultate des Hrn. Christiansen¹⁾ in Betracht zu ziehen. Derselbe erhält aus zwei verschiedenen Versuchen für Wasser die beiden Werthe $k = 21,09$ und $k = 20,87$. Diese Werthe sind, wie er ausdrücklich erwähnt, nicht mit dem Temperaturcoefficienten der Luft corrigirt. Corrigirt man sie daraufhin, so erhält man $k = 22,06$ und $k = 22,30$, im Mittel: $k = 22,18$, ein Werth, der mit dem von mir gefundenen Mittelwerth $K = 21,97$ bis auf weniger als 1 Proc. übereinstimmt. Für absoluten Alkohol erhält jedoch Hr. Christiansen einen erheblich grösseren Werth als ich, nämlich $k = 7,82$.

1) Christiansen, Wied. Ann. 14. p. 23. 1881.

Die von Hrn. F. Weber¹⁾ in seiner letzten diesbezüglichen Arbeit gefundenen absoluten Werthe für die Wärmeleitungsfähigkeit von Wasser und Alkohol sind in folgender Tabelle mit den von mir gefundenen relativen Werthen zusammengestellt:

| | K | K' | $\frac{K'}{K}$ |
|---------|--------|-------|----------------|
| Wasser | 0,0816 | 21,97 | 275 |
| Alkohol | 0,0254 | 6,61 | 260 |

Unter K sind die von Hrn. Weber gefundenen, unter K' die von mir gefundenen Werthe angeführt; der Quotient K'/K zeigt eine ziemlich gute Uebereinstimmung.

§ 4. Folgerungen. Das Gesetz von Weber.

Aus dem Verlaufe der für die Wärmeleitungsfähigkeit der von mir untersuchten Mischungen von Wasser und Alkohol gefundenen Werthe geht hervor, dass dieselben keine Analogie mit den für die Wärmecapacität derselben Mischungen gefundenen zeigen. Sämmtliche Werthe sind kleiner, als der für Wasser gefundene Werth $K = 21,97$, und nehmen regelmässig mit steigendem Alkoholgehalt ab. Dieser Verlauf ist aus der in Fig. 5 dargestellten Curve des Wärmeleitungsvermögens zu ersehen. Hier sind als Abscissen die Alkoholgehalte in 100 Theilen der Mischung aufgetragen, während die Ordinaten die entsprechenden relativen Werthe der Leitungsfähigkeit darstellen. Zum Vergleiche ist in derselben Figur auch die Curve der specifischen Wärmen derselben Mischungen angegeben. Dieselbe zeigt ein Maximum bei ungefähr 20 Proc., und sämmtliche Werthe bis zu einem Alkoholgehalt von 35 Proc. sind grösser als Eins.

Aus diesem ersten Vergleiche lässt sich schon vermuthen, dass das Weber'sche Gesetz in seiner einfachsten Form auf diese Mischungen keine Geltung haben dürfte. Es soll jetzt näher auf dasselbe eingegangen werden.

Hr. F. Weber hat für eine grosse Anzahl von Flüss-

1) F. Weber, Berl. Monatsber. 1885, p. 809.

sigkeiten, die er auf ihre Wärmeleitungsfähigkeit untersuchte, nachgewiesen, dass das Wärmeleitungsvermögen in einer nahen Beziehung stehe zur specifischen Wärme der Volumeneinheit, sowie zur Grösse des relativen Abstandes benachbarter Flüssigkeitsmoleculé.

Er hat gezeigt, dass der Ausdruck:

$$\frac{k}{c \cdot \varrho} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt[3]{\mu}}$$

für alle Flüssigkeiten von ähnlicher chemischer Beschaffenheit einen constanten Werth hat, der auch für verschiedenartige Flüssigkeiten sehr wenig voneinander abweicht. In diesem Ausdruck bedeutet k das Wärmeleitungsvermögen, c die specifische Wärme, ϱ die Dichte der Flüssigkeit, μ die Anzahl der Moleculé des dampfförmigen Zustandes, aus der je ein Molecul der Flüssigkeit besteht, und λ^3 die Grösse des Raumes, in dem durchschnittlich ein Molecul der Flüssigkeit anzutreffen ist. Der Ausdruck $\lambda/\sqrt[3]{\mu}$, die Grösse des relativen Werthes des mittleren Abstandes benachbarter Flüssigkeitsmoleculé, ist gleich dem Ausdruck $\sqrt[3]{m/\varrho}$, worin m die Masse eines Moleculs der flüssigen Substanz, also das Moleculargewicht, bedeutet. Dies ergibt sich leicht aus folgender Ueberlegung:

Ist N die Anzahl der Moleculé des flüssigen Aggregatzustandes im Volumen Eins, so ist die Dichte:

$$\varrho = N \cdot \mu \cdot m;$$

ebenso ist:

$$1 = N \lambda^3,$$

und daraus folgt:

$$\varrho = \frac{1}{\lambda^3} \cdot \mu \cdot m,$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt[3]{\mu}} = \sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}}.$$

Ich habe nun untersucht, ob dieses Gesetz auch für die untersuchten Mischungen gilt. Die von mir für Wasser und Alkohol gefundenen Werthe sind $k_w = 21,97$ und $k_a = 6,61$. Setzt man diese in den Ausdruck $k/c\varrho \cdot \sqrt[3]{m/\varrho}$ ein, so erhält man, wenn man die Dichte des absoluten Alkohols $\varrho = 0,798$, und seine specifische Wärme $c = 0,584$ setzt, die Zahlen:

$$\text{für Wasser } \frac{k}{c\varrho} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}} = 57,57, \quad \text{für Alkohol } \frac{k}{c\varrho} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}} = 54,79,$$

die keine sehr grosse, aber immerhin eine gewisse Uebereinstimmung zeigen. Sehr auffallend aber gestaltet sich das Verhalten der Mischungen in dieser Beziehung. Um den Werth des oben erwähnten Ausdrucks auch für die Mischungen zu ermitteln, mussten für diese Werthe des Moleculargewichts m berechnet werden, welche auf folgende Weise erhalten wurden.

Es seien in der Volumeneinheit der Mischung N_1 Molecüle Wasser und N_2 Molecüle Alkohol enthalten, so besteht die Gleichung:

$1 = (N_1 + N_2)\lambda^3$ und $\varrho = \mu(N_1 m_1 + N_2 m_2)$,
 worin m_1 das Moleculargewicht des Wassers, m_2 das des Alkohols, und μ wieder die Anzahl der Molecüle des dampfförmigen Zustandes, die in einem Molecül der Flüssigkeit enthalten sind, bedeutet, und angenommen wird, dass diese für Wasser und Alkohol dieselbe sei, eine Annahme, die nach den Resultaten der schon erwähnten Versuche Hrn. Weber's wahrscheinlich ist.

Daraus ergibt sich:

$$(4) \quad \frac{\lambda}{\sqrt[3]{\mu}} = \frac{\sqrt{m_1 \cdot \frac{1}{1 + \frac{N_2}{N_1}} + m_2 \cdot \frac{1}{\frac{N_2}{N_1} + 1}}}{\sqrt[3]{\varrho}},$$

worin der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen im Zähler an Stelle von m steht, und man daher zur Berechnung des m für die Mischungen die Gleichung erhält:

$$(5) \quad m = m_1 \frac{1}{1 + \frac{N_2}{N_1}} + m_2 \frac{1}{\frac{N_2}{N_1} + 1}.$$

Enthält nun 1 g Wasser N_1' Molecüle Wasser, so ist:

$$1 = 18 \cdot \mu \cdot N_1',$$

und ebenso, wenn 1 g Alkohol N_2' Molecüle Alkohol enthält:

$$1 = 46 \cdot \mu \cdot N_2',$$

und es ist: $N_1' = \frac{1}{18\mu}, \quad N_2' = \frac{1}{46\mu}.$

Hat man eine Mischung nach Gewichtsprocenten und sind in 100 Theilen der Mischung p Theile Alkohol und $100 - p$ Theile Wasser, so ist:

$$\frac{N_1'}{N_2'} = \frac{46(100 - p)}{18p},$$

wobei aber N_1'/N_2' das Verhältniss der Anzahl Molecüle Wasser und Alkohol in der Gewichtseinheit der Mischung bezeichnet, während die Gleichung (5) N_1/N_2 das Verhältniss der Anzahl Molecüle Wasser und Alkohol in der Volumeneinheit bedeutet. Da aber nur das Verhältniss in der obigen Gleichung für $\lambda/\sqrt{\mu}$ vorkommt, und dasselbe offenbar in der Volumeneinheit dasselbe ist, wie in der Gewichtseinheit, so kann man auch setzen:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{46(100 - p)}{18p},$$

und damit die Werthe von m für sämtliche Mischungen berechnen.

In der folgenden Tabelle sind die mit Hülfe dieser m berechneten Werthe des Ausdrucks $k/cq \cdot \sqrt[3]{m/q}$ zusammengestellt. Die erste Columnne enthält die Werthe für die specifische Wärme c , die zweite die Dichte q , die dritte das Product $c \cdot q$. Ferner die Werthe von k , von m und in der letzten Columnne die Werthe des Ausdrucks $k/cq \cdot \sqrt[3]{m/q}$. Die Zahlen für die specifische Wärme sind Mittelwerthe aus den Resultaten von Hrn. Winkelmann¹⁾ einerseits und den Herren Dupré und Page²⁾ andererseits.

Tabelle III.

| p | c | q | $c \cdot q$ | k | m | $\frac{k}{c \cdot q} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{q}}$ |
|-----|--------|--------|-------------|-------|-------|---|
| 0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 21,97 | 18,00 | 57,57 |
| 10 | 1,0330 | 0,9837 | 1,0162 | 19,99 | 19,16 | 52,93 |
| 20 | 1,0455 | 0,9710 | 1,0147 | 17,88 | 20,48 | 48,69 |
| 30 | 1,0298 | 0,9575 | 0,9844 | 16,07 | 22,01 | 46,42 |
| 40 | 0,9776 | 0,9400 | 0,9189 | 13,97 | 23,78 | 44,63 |
| 50 | 0,9153 | 0,9193 | 0,8414 | 11,99 | 25,86 | 43,34 |
| 60 | 0,8547 | 0,8965 | 0,7662 | 10,45 | 28,35 | 43,13 |
| 70 | 0,7952 | 0,8738 | 0,6949 | 9,16 | 31,36 | 43,48 |
| 80 | 0,7279 | 0,8580 | 0,6245 | 8,24 | 35,08 | 45,45 |
| 90 | 0,6661 | 0,8240 | 0,5489 | 7,04 | 39,81 | 46,71 |
| 100 | 0,5840 | 0,7980 | 0,4660 | 6,61 | 46,00 | 54,79 |

1) Winkelmann, Pogg. Ann. 159. 1873.

2) Dupré u. Page, Phil. Mag. 1869.

Die Werthe der letzten Columne liegen nicht, wie man erwarten könnte, innerhalb der für Wasser und Alkohol gefundenen Grössen des Ausdrucks $k/cq \sqrt[3]{m/q}$, sondern sie zeigen eine bedeutende Abweichung von denselben, indem sie alle kleiner sind als diese. Die grösste Abweichung findet ungefähr bei 60 Proc. statt. Dass diese Abweichung nicht nur infolge der anomalen Werthe für die Wärmecapacität, sondern infolge des Verlaufes der Werthe des Wärmeleitungsvermögens eintritt, kann man ersehen, wenn man statt der beobachteten Werthe für c nach der Gleichung:

$$c = \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p_1 + p_2},$$

worin c_1 die spezifische Wärme des Wassers, c_2 die des Alkohols und p_1 und p_2 die entsprechenden Gewichtsmengen Wasser und Alkohol in der Mischung bedeuten, berechnete Mittelwerthe für c in den Ausdruck $k/cq \sqrt[3]{m/q}$ einsetzt.

In folgender Tabelle sind die so berechneten Mittelwerthe und die dazu gehörigen Werthe des Ausdrucks $k/cq \sqrt[3]{m/q}$ zusammengestellt.

| p | (c berechn.) | $\frac{k}{cq} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{q}}$ | p | (c berechn.) | $\frac{k}{cq} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{q}}$ |
|-----|-----------------|--|-----|-----------------|--|
| 10 | 0,9604 | 56,93 | 60 | 0,7626 | 48,34 |
| 20 | 0,9209 | 55,25 | 70 | 0,7290 | 47,83 |
| 30 | 0,8813 | 54,15 | 80 | 0,6834 | 48,41 |
| 40 | 0,8417 | 51,83 | 90 | 0,6439 | 48,33 |
| 50 | 0,8022 | 49,44 | | | |

Die Werthe zeigen zwar absolut eine etwas geringere Abweichung, aber der Verlauf ist analog wie früher.

Nach diesem Verhalten ist auch schon vorauszusehen, dass, wenn man umgekehrt die Werthe der Wärmeleitungsfähigkeit aus der Dichte, der spezifischen Wärme und dem Moleculargewicht nach Weber berechnet, indem man das Wärmeleitungsvermögen:

$$k = c \cdot q \sqrt[3]{\frac{q}{m}} \cdot C$$

setzt, diese berechneten Werthe von den beobachteten ziemlich starke Abweichungen zeigen werden. Für die Constante

C wurde das Mittel aus den Werthen derselben für Alkohol und Wasser, nämlich $C = 56,18$ gesetzt.

Tabelle IX.

| <i>P</i> | <i>K</i> beobachtet | <i>K</i> berechnet | Differenz | Abweichung in Proc. |
|----------|------------------------|-----------------------|-----------|------------------------|
| 0 | 21,97 | 21,46 | -0,51 | 2,3 |
| 10 | 19,99 | 21,22 | 1,23 | 6,1 |
| 20 | 17,88 | 20,63 | 2,75 | 15,4 |
| 30 | 16,07 | 19,45 | 3,38 | 21,0 |
| 40 | 13,97 | 17,59 | 3,62 | 25,9 |
| 50 | 11,99 | 15,59 | 3,55 | 29,6 |
| 60 | 10,45 | 13,61 | 3,16 | 30,2 |
| 70 | 9,16 | 11,84 | 2,68 | 29,2 |
| 80 | 8,24 | 10,18 | 1,94 | 23,5 |
| 90 | 7,04 | 8,47 | 1,43 | 20,3 |
| 100 | 6,61 | 6,78 | 0,17 | 2,6 |

Die Abweichung zwischen beobachteten und berechneten Werthen geht bis zu 30 Proc. In Fig. 5 ist auch die Curve der berechneten Werthe punktirt verzeichnet. Die grösste absolute Abweichung ist zwischen 40 und 43 Proc. Alkoholgehalt.

Für die Ursache dieses auffälligen Verhaltens der Mischungen des Aethylalkohols mit Wasser fehlt bis jetzt noch jede Vermuthung und wird wohl erst gefunden werden können, wenn wir mehr Klarheit über das Wesen dieser Mischungen, die in allen ihren physikalischen Eigenschaften merkwürdige Abweichungen zeigen, besitzen, und die Frage gelöst sein wird, ob wir es hier mit Mischungen oder vielleicht doch mit chemischen Verbindungen zu thun haben.

Es ist vielleicht nicht uninteressant, hier auf eine Zusammenstellung sämtlicher physikalischer Eigenschaften der Mischungen von Alkohol und Wasser von Daurer¹⁾ zu verweisen, in welcher er zeigt, dass durchwegs auf jedem Gebiete (Dichtigkeit, spec. Wärme etc.) eine Differenz zwischen den beobachteten Grössen und den aus den Eigenschaften der beiden Bestandtheile berechneten Mittelwerthen sich zeigt. Besonders bemerkenswerth ist es aber, dass diese

1) Daurer, XXVI. Jahresber. der Wiener Communal-Oberrealschule. Wien 1881.

Abweichung bei fast allen Eigenschaften bei einem Alkoholgehalt von 30 bis 40 Proc. ein Maximum erreicht. So findet er, dass die Differenz zwischen den beobachteten und berechneten Werthen für die Capillarität, die Siedepunkte und die Wärmecapacität bei ungefähr 30 Proc. ein Maximum erreicht, während dieses Maximum bei der thermischen Ausdehnung bei 44 Proc. und bei der Compressibilität bei 40 Proc. eintritt. Die Contraction, welche beim Mischen von Aethylalkohol und Wasser eintritt, ist am grössten bei ungefähr 46 Proc. Alkoholgehalt.

Unter diese Eigenschaften lässt sich nun nach den Resultaten der von mir angestellten Versuche auch die Wärmeleitungsfähigkeit einreihen, welche auch, wie aus Tab. IX, p. 162 ersichtlich, in der Nähe von 40 Proc. ein Maximum der Abweichung zwischen beobachteten und berechneten Werthen zeigt. Ich will schliesslich auch noch erwähnen, dass Hr. Pfeiffer¹⁾ in neuerer Zeit Untersuchungen über das electriche Leitungsvermögen der Alkohol-Wassermischungen ausgeführt hat, die bei einem Alkoholgehalt von 30 Proc. ein Minimum und bei einem Alkoholgehalt von 83 Proc. ein Maximum zeigen, und dass das Minimum bei 30 Proc. tiefer liegt als die Werthe der Leitungsfähigkeit sowohl des Wassers als auch des Alkohols.

Es zeigt sich also, dass in der Reihe der von reinem Wasser zu reinem Alkohol regelmässig fortschreitenden Mischungen gewisse Punkte in der Nähe von 30 und 40 Proc. Alkoholgehalt besonders ausgezeichnet sind, wofür auch die von mir bestimmten Werthe des Wärmeleitungsvermögens einen neuen Beweis liefern, und es gewinnt daher die schon mehrfach ausgesprochene Vermuthung an Berechtigung, dass in diesem Intervall eine oder auch mehrere noch nicht näher bekannte chemische Verbindungen von Alkohol und Wasser nach einfachen Verhältnissen mit den von den Eigenschaften der Bestandtheile verschiedenen charakteristischen Eigenschaften sich bilden, während in den andersprocentigen Mischungen diese Verbindungen sich nur aus einem Theile

1) Pfeiffer, Wied. Ann. 25. p. 244. 1885.

der Bestandtheile bilden können, und in dem Ueberschuss des einen oder anderen Bestandtheiles gelöst sind.

Es ist wenigstens leicht, für die einzelnen Mischungen einfache Verbindungsverhältnisse theoretisch aufzustellen, wenn auch kein zwingender Grund vorhanden ist, dass in Wirklichkeit dieselben Mischungsverhältnisse eintreten. So will ich nur erwähnen, dass beispielsweise einem Alkoholgehalte von 29,9 Proc. die chemische Formel $C_2H_6O + 6H_2O$, einem Procentgehalte von 38,9 die Verbindung $C_2H_6O + 4H_2O$, einem von 46,0 Proc. die Verbindung $C_2H_6O + 3H_2O$, einem von 42,2 Proc., an welcher Stelle ungefähr für die Wärmeleitungsfähigkeiten das oben erwähnte Maximum liegt, die Verbindung $2C_2H_6O + 7H_2O$ entspricht, lauter einfache und ganz gut denkbare Verbindungen.

Die vorliegende Untersuchung über das Wärmeleitungsvermögen der nach Gewichtsprocenten hergestellten Mischungen von Aethylalkohol und Wasser ergibt:

1. dass die Werthe des Wärmeleitungsvermögens der Mischungen sämmtlich innerhalb der Grenzen der für Wasser und Alkohol gefundenen Werthe liegen und regelmässig mit zunehmendem Alkoholgehalte abnehmen;

2. dass diese Mischungen das von Weber aufgestellte Gesetz in der vorliegenden Form nicht vollständig befolgen.

Es hängt daher das Wärmeleitungsvermögen dieser Mischungen entweder noch von anderen im Weber'schen Gesetze nicht berücksichtigten Eigenschaften derselben ab, oder man hat es hier nicht mit Mischungen, sondern einer oder auch mehreren chemischen Verbindungen mit etwas veränderten Eigenschaften zu thun, die sich, wenn sie einmal näher bekannt sind, ohne Zweifel in die Reihe aller übrigen Flüssigkeiten, die das Weber'sche Gesetz ohne Ausnahme befolgen, einreihen werden.

Jena, Februar 1888.

VIII. *Ueber die Schallgeschwindigkeit in Dämpfen
und die Bestimmung der Dampfdichte;
von Wilhelm Jaeger.*

(Hierzu Taf. II Fig. 6–8.)

Die Schallgeschwindigkeit eines vollkommenen Gases ist bekanntlich nach der für dasselbe geltenden Formel:

$$u = \sqrt{g \cdot k \cdot \frac{R'}{d} \cdot T^1)}$$

nur mit seiner Temperatur veränderlich, indem man die relative Dichte (d) desselben, sowie das Verhältniss seiner specifischen Wärmen (k) als constant annimmt.

Während somit der Werth u für Gase (nach Reduction auf gleiche Temperatur) eine constante Grösse ist, hat man dies bei Dämpfen im allgemeinen nicht mehr zu erwarten. Doch wird sich u einer solchen um so mehr nähern, je weiter der Dampf vom Sättigungspunkt entfernt ist, dagegen in der Nähe desselben bei verschiedenen Temperaturen und je nach dem Sättigungsgrad verschiedene Werthe erhalten.

Denn sowohl die relative Dichte des Dampfes, als auch das Verhältniss der specifischen Wärmen ist von der Temperatur und dem Sättigungsgrad abhängig, und es ist von Interesse, gerade die letztere Grösse aus der Schallgeschwindigkeit zu berechnen. Dies soll im Folgenden für einige Dämpfe geschehen.

Um aber diese Berechnung ausführen zu können, muss die veränderliche Dichte für diese verschiedenen Zustände bekannt sein. Es hat sich aber gezeigt, dass dies leider nicht in dem Maasse der Fall ist, als es zur Berechnung von k erwünscht wäre, worauf ich später noch näher eingehen werde.

Ehe ich zur Besprechung meiner eigenen Versuche übergehe, will ich noch einen kurzen Ueberblick über mir be-

1) In obenstehender Formel bedeutet R' die für Luft geltende Gasconstante, T die absolute Temperatur.

kannt gewordene Bestimmungen der Schallgeschwindigkeit in Dämpfen geben.

Die älteste Arbeit hierüber stammt meines Wissens von Masson¹⁾, der, wie es scheint, mit grosser Sorgfalt die Schallgeschwindigkeit einer Anzahl von Gasen und Dämpfen bestimmt hat. Er benutzte dazu die bereits von Dulong²⁾ zu demselben Zweck angewandte Methode, die Tonhöhe einer und derselben Orgelpfeife in verschiedenen Gasen und Dämpfen mit einer constanten Tonquelle (Monochord) zu vergleichen und dadurch die relative Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Verhältniss zu der in Luft festzusetzen.

Aus den von Masson für die untersuchten Dämpfe angegebenen Schallgeschwindigkeiten (u)³⁾ (für Luft $u' = 333$ m gesetzt) ergeben sich folgende Verhältnisszahlen:

| | | |
|---------------------|-----------------|--------------------------------|
| Wasserdampf | $u/u' = 1,204$ | bei $t = 95,0^\circ \text{C.}$ |
| Schwefelkohlenstoff | $u/u' = 0,5676$ | " " = ? |
| Alkoholdampf | $u/u' = 0,6925$ | " " = 78,5 " |
| Aetherdampf | $u/u' = 0,5382$ | " " = 35,5 " |
| Aethylchlorid | $u/u' = 0,5976$ | " " = 12,0 " |

Die Zahlen beziehen sich auf den Sättigungszustand der Dämpfe in der Nähe der Siedetemperatur, und Masson bemerkt ausdrücklich, dass der Ton in den gesättigten Dämpfen ebenso gut wie in Gasen erzeugt wird, was nicht der Fall sein könnte, wenn Condensation des Dampfes eintrete. Dasselbe fand auch schon früher Biot⁴⁾ und knüpfte daran den Beweis für die Wärmeentwicklung bei adiabatischer Compression eines gasförmigen Körpers.

Es ist auch nicht wahrscheinlich, dass bei den schnell aufeinander folgenden Compressionen und Dilatationen eine Condensation des Dampfes stattfinden sollte, da derselbe, wie Hr. R. v. Helmholtz in seiner Dissertation über „Dämpfe und Nebel“⁵⁾ nachgewiesen hat, recht gut in sogar sehr übersättigtem Zustand bestehen kann.

Eine andere des öfteren angewandte Methode ist das

1) Masson, Ann. de chim. et de phys. (3) 53. p. 257. 1858.

2) Dulong, Ann. de chim. et de phys. (2) 41. p. 113. 1829.

3) Masson, l. c. p. 283.

4) Biot, Traité de physique T. II. p. 22. 1816.

5) R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 30. p. 401. 1887.

von Hrn. Kundt¹⁾ ausgebildete Verfahren der Staubfigurenmessung, das er selbst zur Bestimmung des Verhältnisses der specifischen Wärmen des Quecksilberdampfes anwandte, wie auch später Hr. Strecker²⁾ zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit im Chlor-, Brom- und Joddampf. (Auch Hr. Wüllner benutzte die Kundt'sche Methode zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in einigen Gasen.)³⁾

Hr. Beyme hat endlich in seiner Dissertation⁴⁾ im wesentlichen die auch hier berücksichtigten Dämpfe in Betracht gezogen. Er benutzte zur Messung der Wellenlänge des in stehende Schwingungen versetzten Dampfes die auch schon von Rayleigh⁵⁾ zu Intensitätsbestimmungen verwandten Scheibchen, welche sich in den Bäuchen des Wellenrohres quer zur Axe stellen, an den Knotenpunkten dagegen in Ruhe bleiben.

Durch Anwendung magnetisirter Stahlscheibchen konnte eine bestimmte Ruhelage derselben fixirt werden. Die Untersuchungen erstrecken sich auf die Dämpfe von Aethyläther, Schwefelkohlenstoff, Chloroform, Benzol und Wasser und sind alle im Sättigungszustand derselben angestellt. Beim Wasserdampf wurden überhaupt nur drei Wellen gemessen und scheint auch die Genauigkeit der Einstellung gering gewesen zu sein.

Auf Anrathen des Hrn. Geheimrath v. Helmholtz unternahm ich es nun vor einiger Zeit, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einigen bekannteren Dämpfen sowohl im Sättigungszustand bei verschiedenen Temperaturen, als auch in verschiedenen Graden der Annäherung an denselben experimentell zu bestimmen.

Hierbei entschied ich mich für die Kundt'sche Methode, da sie die genauesten Messungen und auch eine directe Vergleichung mit der Luft zulässt.

1) Kundt, Pogg. Ann. 127. p. 497. 1866; 135. p. 337. 1868; ferner Kundt und Warburg, Pogg. Ann. 157. p. 353. 1876.

2) Strecker, Wied. Ann. 13. p. 20. 1881.

3) Wüllner, Wied. Ann. 4. p. 321. 1878.

4) Beyme, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in gesättigten Dämpfen. Inauguraldiss. Zürich, 1884 u. Beibl. 9. p. 503. 1885.

5) Rayleigh, Beibl. 3. p. 96. 1879.

Am meisten Interesse bot die Untersuchung des Wasserdampfes; da derselbe aber wegen seiner geringen Dichte und der durch ihn bedingten, sonst immer bei Staubfigurenversuchen sehr störenden Feuchtigkeit voraussichtlich grosse Schwierigkeiten bereiten musste, so wurde zunächst Aetherdampf in Angriff genommen, der seines niedrigen Siedepunktes wegen ein bequemerer Experimentiren gestattete.

Versuche mit Aetherdampf.

Es handelte sich hierbei zunächst darum, festzustellen, ob der gesättigte Dampf die Bildung der Staubfiguren nicht beeinträchtigt und überhaupt den Schall leitet, worüber man noch im Zweifel sein konnte. Daher verschob ich die Construction eines allen Anforderungen entsprechenden Apparates bis später und bediente mich hier des von Wüllner für Gase benutzten, in der Einleitung erwähnten Apparates, an dem für unsere Zwecke nur kleine Modificationen anzubringen waren.

Der Aether war in einer seitlich angebrachten Kugel enthalten, die durch einen Hahn von dem übrigen Raume abgeschlossen werden konnte. Durch Oeffnen dieses Hahnes, nachdem der Apparat luftleer gemacht worden war, wurde derselbe mit dem Dampfe gefüllt. Eine nähere Beschreibung aller Einzelheiten kann ich hier umso mehr übergehen, als dieser Apparat nur vorläufigen Versuchen gedient hat. Im wesentlichen stimmt er mit dem von Kundt¹⁾ beschriebenen sogenannten „Einfachen Longitudinalapparat“ überein.

Ich konnte nicht bemerken, dass es schwerer gehalten hätte, im Sättigungszustand Staubfiguren zu erhalten, als im überhitzten Dampf.

Durch Abkühlen der Kugel konnte man ausserdem jeden Sättigungsgrad herstellen, und es zeigte sich, dass auch bei einer Abkühlung der Kugel in Eis (180 mm Druck) noch recht gute Figuren zu erhalten waren.

Bei den mit diesem Apparat (Sommer 1885) angestellten

1) Kundt, Pogg. Ann. 127. p. 497. 1866.

Versuchen war die Temperatur des Dampfes immer diejenige des Zimmers (circa 20° C.), da die Untersuchungen für andere Temperaturen besser mit dem später beschriebenen Apparat anzustellen waren.

Die Messung der Staubfiguren¹⁾ geschah, wie auch späterhin, mit einem im hiesigen Institut hergestellten Glasmaassstab, an dem ein Visir angebracht war.

Es wurde immer eine Anzahl hintereinander liegender Knoten, resp. Bäuche der Staubfiguren hiermit eingestellt und die einzelnen Zahlen nach der von Kundt in der erwähnten Abhandlung entwickelten Wahrscheinlichkeitsformel²⁾:

$$y = 6 \frac{(n-1)(y_n - y_1) + (n-3)(y_{n-1} - y_2) + \dots}{n(n^2 - 1)}$$

verwerthet.

In dieser Formel bedeuten y_1, y_2 etc. die einzelnen Einstellungen, n ihre Anzahl und y den wahrscheinlichsten Werth der Figurenlänge.

Meistens wurden sowohl die Knoten als die Bäuche gemessen und aus den beiden so berechneten Zahlen, die sich gewöhnlich nur sehr wenig unterschieden, das Mittel genommen. Eine grössere Genauigkeit, als Bruchtheile von Zehntelmillimetern, darf man selbst bei recht guten Messungen nicht annehmen, da auch noch systematische Ablesungsfehler³⁾ vorkommen, und nur das Mittel aus einer grösseren Anzahl von Versuchen kann einen noch genaueren Werth liefern.

Bei den hier angeführten Versuchen hatte meistens der ganze Apparat dieselbe Temperatur und blieb letztere auch während des Tages ziemlich constant, sodass bedeutende Fehler durch die Temperaturbestimmung nicht möglich waren. Für unseren Fall wurde übrigens ein Irrthum von 1° C. bei

1) Es diente für dieselben gesiebte Korkfeile oder Kieselsäurepulver.

2) Kundt, l. c. p. 357.

3) Die Figuren werden nämlich, je nach der Stärke des Reibens, nach dem einen Ende der Röhre hingedrängt, sodass sich die ganze Figur schliesslich auf einen Punkt zusammenzieht, der etwas seitlich vom Knotenpunkt liegt. Es ist klar, dass hierdurch Ablesungsfehler entstehen müssen.

den Aetherfiguren (ca. 25,5 mm) etwa 0,04 mm, bei den Luftfiguren ungefähr das Doppelte betragen.

In den folgenden Tabellen sind λ und λ' die Figurenlängen in Aetherdampf und Luft in Millimetern, auf 20° reducirt. Durch Multiplication des Verhältnisses der Schallgeschwindigkeit λ/λ' mit 332,5 (Schallgeschwindigkeit in Luft bei 0°) erhält man u_0 . Δ ist die Abweichung der Einzelergebnisse vom Mittel, die Schreibweise $0^\circ/20^\circ$ in Tab. II bedeutet, dass der Dampf die Temperatur 20° hatte, während die kälteste Stelle auf 0° erhalten war; es ist hierdurch der Grad der Ueberhitzung gegeben.

Tabelle I. Gesättigter Aetherdampf von $20,4^\circ\text{C}$.

| | Nr. | λ | λ' | Temp. | λ/λ' | Δ | u_0 |
|----------------------|-----|-----------|------------|--------------------|----------------------|----------|----------|
| Juni 1885 | 15 | 25,30 | 47,04 | 23°C | 0,5378 | | 178,83 m |
| | 26 | 25,14 | 46,62 | 20,1 | 0,5393 | +02 | |
| | 27 | 25,13 | 46,78 | 20,1 | 0,5371 | -20 | |
| | 28 | 25,26 | 46,73 | 20,8 | 0,5407 | +16 | |
| | 29 | 25,19 | 46,72 | 20,2 | 0,5391 | 0 | |
| | 30 | 25,13 | 46,73 | 20,5 | 0,5378 | -13 | |
| | 31 | 25,20 | 46,62 | 20,5 | 0,5405 | +14 | |
| Mittel aus Nr. 26-31 | | | | 20,4 | 0,5391 ²⁾ | ± 14 | 179,24 m |
| Beyme ¹⁾ | | | | 20,5 | 0,5393 | | |

Die aus Beyme's Angaben sich ergebende Zahl 0,5393 bei $20,5^\circ$ stimmt, wie man sieht, zufällig sehr genau mit dem Mittelwerthe obiger Tabelle.

Bei $35,5^\circ$, für welche Temperatur ich noch keine Versuche angestellt habe, ergibt sich

nach Masson $\lambda/\lambda' = 0,5382$, dagegen

„ Beyme $\lambda/\lambda' = 0,5309$ bei 35° .

Diese Zahlen werde ich bei der Berechnung mit berücksichtigen.

Die folgende Tabelle giebt die Werte von λ/λ' für ungesättigten Aetherdampf; bei diesen Versuchen wurde die Kugel in Eis gesteckt.

1) Siehe Einleitung.

2) Der wahrscheinliche Fehler des Mittels ist $0,07\%$.

Tabelle II. Ungesättigter Aetherdampf von 0°/20° C.

| | Nr. | λ | λ' | λ/λ' | Δ | n_0 |
|----------------------|-----|-----------|------------|-----------------------|----------|----------|
| 22. Juni 1885 | 20 | 25,56 | 46,78 | 0,5463 | +03 | |
| | 21 | 25,51 | 46,63 | 0,5470 | +10 | |
| | 22 | 25,56 | 46,73 | 0,5470 | +10 | |
| | 23 | 25,52 | 46,88 | 0,5444 | -16 | |
| | 24 | 25,58 | 46,89 | 0,5457 | -03 | |
| | 25 | 25,50 | 46,75 | 0,5455 | -05 | |
| Mittel aus Nr. 20—25 | | | | 0,54598 ¹⁾ | ±10 | 181,54 m |

Die Berechnung der hier erhaltenen Zahlen wird in einem späteren Abschnitt stattfinden.

Apparat für höher siedende Flüssigkeiten.

Für höher siedende Flüssigkeiten hätte ich auf den von Kundt und Warburg für Quecksilberdampf benutzten Apparat (Einleitung) zurückzugreifen können, doch schien mir derselbe gar zu zerbrechlich, da er ganz Glasbläserarbeit ist und wie ein einziges Glasrohr von der nämlichen Länge an drei Stellen eingeklemmt und durch Reiben zum Tönen gebracht wird.

Deshalb benutzte ich den von Kundt ebenfalls angegebenen und früher erwähnten „Doppelapparat“, mit einigen kleinen Veränderungen. Doch nahm ich die Dimensionen etwas kleiner; die tönende Röhre statt 1,50 m nur 1,15 m und die übrigen Theile im selben Verhältniss.

Der Einfachheit halber gab ich dem Apparat eine langgestreckte Gestalt, während er dort durch Umbiegung einiger Röhren in seiner Länge wesentlich reducirt wird.²⁾

Einige Schwierigkeit bereitete das Auffinden eines geeigneten Kittes, um die verschiedenen Schraubenverschlüsse auf den Glasröhren zu befestigen. Da die Temperatur bis etwa 100° gesteigert werden sollte, so war natürlich Siegelack, der sonst hierfür bei Luftpumpen etc. verwendet wird, ausgeschlossen. Mennigekitt hingegen hat eine zu geringe

1) Der wahrscheinliche Fehler des Mittels ist hiernach $\pm 0,05\%$.

2) Siehe die Beschreibung des Apparates Pogg. Ann. 135. p. 353. 1868.

Festigkeit, da die Schrauben mit ziemlicher Gewalt angedreht werden mussten, um luftdicht zu schliessen. Ich fand zuletzt, nachdem auch noch verschiedene andere in der Technik benutzte Kitten sich als unbrauchbar hierfür herausgestellt hatten, in dem Schwefel eine geeignete Substanz. Derselbe schmilzt erst bei 111° und wird vorher nicht weich. Man trägt ihn geschmolzen auf die heiss gemachte Glasröhre auf und schiebt die ebenfalls erwärmten Messingtheile, die streng anpassen müssen, dann über dieselbe. Diese Methode hat sich gut bewährt.

Eine weitere Schwierigkeit bestand darin, ein geeignetes Pulver für die Staubfiguren ausfindig zu machen, welches auch im Wasserdampf brauchbar war, und ich suchte lange vergeblich nach einem solchen.

Die geglühte Kieselsäure hat ein zu grosses specifisches Gewicht (ca. 2,68 . .), und es kam besonders für Wasserdampf seiner geringen Dichte wegen darauf an, ein möglichst leichtes Pulver zur Verfügung zu haben.

Die übrigen Substanzen, wie Korkfeile und Lycopodium sind selbstverständlich, ebensowenig anwendbar.

Der Gedanke indes, die früher angewandten Korkfeile zu verkohlen, lieferte ein sehr brauchbares Pulver. Nachdem dieselben zu diesem Zwecke gesiebt und zur Befreiung von Salzen ausgekocht sind, werden sie bei Luftabschluss erhitzt, bis alle verbrennlichen Producte abdestillirt sind. Die zurückgebliebene Kohle wird zum Schluss mit Aether ausgewaschen, um etwa noch anhaftenden Theer etc. zu beseitigen.

Dieselbe stellt so ein ungemein leichtes Pulver von der Porosität des Korkes dar, welches sehr schöne scharfe Figuren gibt und nur, wenn direct sich Flüssigkeit darauf niederschlägt, oder die Wände nass sind, unbeweglich wird.

Mit diesem verkohlten Korkpulver sind alle weiteren Versuche ausgeführt. Die Figuren werden besonders deutlich sichtbar, wenn man unter das Rohr einen Streifen Milchglas anbringt.

Um die Füllung des Apparates mit Dampf zu bewerkstelligen, musste ich ein von dem übrigen Raume abschliessbares Reservoir anbringen, welches die betreffende Flüssig-

keit enthielt und erst nach dem Luftleerpumpen des für den Dampf bestimmten Raumes mit diesem in Verbindung zu setzen war. Doch musste ich hierbei von der Verwendung eines Hahnes absehen, da das zum Dichten desselben benutzte Fett durch die Erwärmung flüssig geworden wäre.

Nach einigen vergeblichen Versuchen benutzte ich später als Flüssigkeitsreservoir einfach eine Kugel mit ausgezogener Spitze, die, zum Theil mit Flüssigkeit gefüllt, im übrigen luftfrei war.

Diese Kugel (siehe Taf. II Fig. 6) wurde durch ein Stück Luftpumpenschlauch (*L*) mit dem Theil *b* verbunden, welcher mittelst eines Schraubenverschlusses (*s*) an einer Seitenröhre des Apparates zu befestigen war. Nach dem Auspumpen des letzteren wurde dann die Spitze der Kugel, welche vorher bei *a* mit einem Feilstrich versehen worden war, unter dem Schlauch abgebrochen, worauf die Verdampfung beginnen konnte.

Die luftfreie Füllung der Kugel, welche ursprünglich eine lang ausgezogene Spitze besitzt, kann auf verschiedene Weise stattfinden.

Bei Wasser verfuhr ich meistens so, dass ich die mit der destillirten Flüssigkeit angefüllte Kugel bis zum Sieden derselben erwärmte und während desselben einen vorläufigen Verschluss mit weich gemachtem Siegellack bewerkstelligte. Sodann wurde an der gewünschten Stelle vor der Glasbläserlampe abgeschmolzen. Man kann dadurch die Kugel leicht so luftfrei machen, dass nachher das Wasser beim Schütteln metallisch an die Wände klopft.

Bei Alkohol, Aether und ähnlichen Flüssigkeiten hingegen ist diese Methode der Feuergefährlichkeit wegen nicht gut anwendbar. Deshalb liess ich bei diesen die Flüssigkeit nach Herstellung eines Vacuums aus einem grösseren Gefäss in die Kugel überdestilliren, indem ich letztere in Eis kühlte. Man verbindet damit noch den Vortheil, eine frisch destillirte Flüssigkeit zur Verfügung zu haben.

Dieser durch die Flüssigkeitskugel etc. gebildete Theil des Apparates sollte zugleich die Herstellung eines überhitzten Dampfes ermöglichen und war zu diesem Zwecke

mit einem doppelwandigen Blechgefäss umgeben, welches in dem grösseren Wasserbade stand, und dem man leicht die gewünschte Temperatur ertheilen konnte. Man muss dafür sorgen, dass dieser Theil, den ich im Folgenden mit „Reservoir“ bezeichnen werde, wirklich die kälteste Stelle ist. Deshalb ist noch die Kugel *b* angebracht, die auch durch ihr grösseres Volumen einen ausgedehnteren kalten Raum repräsentirt. In gleicher Höhe mit ihr befindet sich auch die Kugel des Reservoirthermometers (*t*), durch dessen Angabe man den Druck des auf die Temperatur des Wasserbades überhitzten Dampfes erfährt.

Zum Auspumpen des Apparates diente eine Töpler-Hagen'sche Quecksilberpumpe (ohne Hähne), die mit einer Seitenröhre des Dampfraumes verbunden war. Nach Erreichung des Vacuums wurde diese Verbindung durch Abschmelzen unterbrochen und das abgeschmolzene Ende ebenfalls unter Wasser gebracht, um es auf gleiche Temperatur wie die übrigen Theile zu erwärmen.

Dann konnte die Spitze der Kugel abgebrochen werden und der Versuch nach einiger Zeit beginnen, wenn man annehmen durfte, dass der richtige Dampfdruck erreicht war.

Ursprünglich waren alle Theile, wie auch bei dem Kundt'schen Apparate, von Glas, und führte ich eine Anzahl Versuche in Wasserdampf mit diesem Apparate aus, die jedoch wegen Undichtigkeit desselben ungenau waren und hier deshalb nicht mitgetheilt sind.

Ausserdem glückten auch während langer Zeit nur sehr wenige Versuche, da häufig durch die gleichzeitigen Druck- und Temperaturänderungen die angewandten Glastheile während oder nach dem Versuche sprangen, sodass durch die fortwährenden Reparaturen an ein Vorwärtstommen nicht zu denken war.

Daher liess ich an Stelle des Glases, soweit es anging, Messingtheile treten, hatte aber auch hierbei eigenthümliche Schwierigkeiten zu überwinden, deren Eintritt nicht voraussehen war.

Die beigelegte Zeichnung (Taf. II Fig. 7) stellt den Apparat

in seiner endgültigen Gestalt dar; der Maassstab derselben ist $\frac{2}{30}$ natürlicher Grösse.

Die tönende Röhre AA' , die nun auch von Messing ist, ist an beiden Enden durch aufgelöthete Messingplatten¹⁾ geschlossen und gibt, an den Stellen B und B' eingeklemmt und mit einem nassen, wollenen Lappen gerieben, einen sehr kräftigen Ton von ca. 3100 Schwingungen (g_4) bei der früher angegebenen Länge der Röhre (1,15 m). Die Länge der Staubfiguren in Luft beträgt bei diesem Ton ungefähr 56,5 mm bei mittlerer Temperatur.

Die über die Enden des Tonrohres übergeschobenen weiteren Röhren, die ebenfalls aus Messing bestehen, sind mit BC und $B'C'$ bezeichnet. (Die gestrichelten Buchstaben beziehen sich auf die Luftseite. Vergleichsrohr.)

Die Dampfseite befindet sich vollständig, wie Fig. 7 zeigt, in einem grossen Wasserbade (WW'), das mit etwa 50 l Wasser gefüllt und durch einige darunter gestellte Vierbrenner auf die gewünschte Temperatur gebracht wurde.

An den Knotenpunkten B und B' sassen durchbohrte Kautschukpfropfen, welche möglichst fest in die Röhren BC etc. hineingedreht und durch Kautschukleim (Auflösung von unvulkanisirtem Kautschuk in Benzin) oder Guttaperchakitt noch ganz luftdicht gemacht wurden.

Damit durch den Luftdruck nicht die Tonröhre in BC hineingetrieben werden konnte, wurden bei b und b' noch kleine Ringe aufgelöthet, an welche sich die Pfropfen fest andrücken konnten.

Der zur Tonerzeugung dienende Theil war in den Punkten B und B' , wie in der Zeichnung angedeutet, auf ein festes Gestell aufgeschraubt.

CD und $C'D'$ sind die ca. 20 mm weiten und 1 m langen Staubfigurenröhren. Die Ueberführung zu denselben geschah durch einen Schraubenverschluss (bei c), resp. durch einen Gummipfropf (c').

1) Es war nöthig, die Messingplatten an den Enden hart aufzulöthen (mit Silberloth), da bei Anwendung von gewöhnlichem Schnellloth dieses durch den kräftigen Ton bald Risse bekam und dadurch die Tonentstehung verhinderte wurde.

Das Ende D des Dampfrohres stand mit dem früher beschriebenen Reservoir R ebenfalls durch einen Gummipfropfen in Verbindung. Bei T befindet sich das Reservoir-Thermometer; ausserdem sind an den Enden des Dampfrohres bei T_1 und T_2 noch zwei Thermometer angedeutet. Ebenso war das Vergleichsrohr mit einem Thermometer versehen.

Die seitlichen Röhren E und E' dienen zum Auspumpen und Trocknen der beiden Räume. Sie sind möglichst an das Ende B verlegt, damit nach Wegnahme des Verschlusses D die trockene Luft den ganzen Apparat durchstreichen kann.

Bei F ist die ausgezogene Stelle, die nach dem Auspumpen abgeschmolzen wird. Durch eine Siegellackkittung bei H ist eine luftdichte Verbindung des Dampfraumes mit der Quecksilberpumpe hergestellt.

Durch MM' ist ferner der Maassstab angedeutet, welcher parallel dem Dampfrohr ausserhalb des Wasserbades aufgestellt wurde, wobei das Visir V die Figurenlänge zu messen gestattete.

Auch ein Manometer hatte ich anfänglich an dem Apparate angebracht, doch verzichtete ich später auf dasselbe wegen seiner bedeutenden Complicirtheit und der damit verbundenen häufigen Störungen.¹⁾

In dieser Form war der hier beschriebene Apparat auch leicht auseinander zu nehmen, während dies früher, so lange noch alles von Glas war, oft grosse Unzuträglichkeiten mit sich brachte.

Ehe ich zu den mit diesem Apparate angestellten Versuchen übergehe, muss ich noch einige Eigenthümlichkeiten berühren, die sich beim Zusammenstellen desselben gezeigt haben.

Es fiel nämlich auf, dass im Vergleich zu dem kräftigen Ton des Rohres unverhältnissmässig schwache Staubfiguren erhalten wurden, und es war dann auch nicht möglich, in

1) Es beruhte dasselbe, wie das von Magnus benutzte (Pogg. Ann. 61. p. 225. 1844), darauf, dass man aussen und innen denselben Druck herstellt und denselben an dem äusseren Manometer abliest.

Wasser- oder Alkoholdampf eine Bewegung des Staubes zu bewirken.

Selbst im Aetherdampf, der doch früher keine Schwierigkeiten bereitet hatte, konnte ich nur unter bestimmten Bedingungen Figuren hervorrufen, und sind diese Umstände interessant genug, um nicht übergangen zu werden.

Es zeigte sich nämlich, dass es bei diesem schwachen Ton, auf dessen Ursache ich noch später zurückkomme, nicht möglich war, über einen bestimmten Sättigungsgrad hinaus zu gehen, ohne dass die Bewegung des Staubes völlig aufhörte.

Bei Abkühlung des Reservoirs (stärker überhitzter Dampf) zeigte sich dann wieder Bewegung, bis man wieder zu dem betreffenden Punkt kam.

Ich gebe im Folgenden eine Zusammenstellung einer darauf bezüglichen Versuchsreihe, worin t die Temperatur des Bades, s den Sättigungsgrad (d. h. wirklich vorhandener Druck nach Angabe des Reservoirs dividirt durch den Druck bei t^0) bezeichnet. Das Zeichen + deutet an, dass Bewegung erhalten war, — Bewegungslosigkeit.

Tabelle III. Grenze der Beweglichkeit.

| Nr. | t^0 | s | Zeichen | Nr. | t^0 | s | Zeichen |
|-----|-------|--------|---------|------|-------|--------|---------|
| I | 30 | 0,7404 | + | VIII | 39 | 0,8674 | — |
| II | 36,1 | 0,9533 | — | IX | 38,5 | 0,8294 | + |
| III | 38 | 0,6200 | + | X | 38,5 | 0,8760 | — |
| IV | 38 | 0,8975 | — | XI | 39 | 0,7665 | + |
| V | 39 | 0,6738 | + | XII | 39 | 0,8098 | + |
| VI | 39 | 0,7521 | + | XIII | 39 | 0,8241 | Grenze |
| VII | 39 | 0,8098 | + | XIV | 31,5 | 0,6957 | + |

Die Versuche sind in der oben angegebenen Reihenfolge ausgeführt und bewegen sich, wie man sieht, um die Grenze 0,8241 entsprechend einer Reservoirtemperatur 33,5° bei 39° Badtemperatur. Eine geringe Erniedrigung, wie z. B. in Nr. IX auf den Sättigungsgrad 0,8234, ruft bereits wieder Bewegung hervor. Dies Verhalten habe ich durch wiederholte Versuche bestätigt gefunden.

Da bei diesem schwachen Ton für eine gewisse Sättigung

die Bewegung ganz aufhört, so wird sie auch bei starkem Ton wesentlich geschwächt werden.

Wenn aber, wie bei dem Wasserdampf seiner geringen Dichte wegen, die lebendige Kraft der Bewegung schon an und für sich klein ist, so kann selbst bei starkem Ton dieselbe durch die eben festgestellte Erscheinung so vermindert werden, dass gar keine Figuren entstehen. Daraus erklären sich auch wohl viele vergebliche Versuche mit Wasserdampf, als der Apparat noch ganz aus Glas war.

Wie diese Thatsache zu erklären ist, muss ich noch dahingestellt lassen. Vermuthen kann man vielleicht, dass bei einem gewissen Sättigungsgrade die Wärmeleitung und Reibung einen bedeutenderen Einfluss gewinnt, indem dann die grosse Absorptionskraft der Dämpfe den Wärmeaustausch merklich werden lässt oder auch vielleicht durch die Attraction des Pulvers und der Glaswände eine Nebelbildung in der Nähe derselben hervorgerufen wird. Beides würde eine bedeutende Verminderung der Schallintensität bewirken können.

Später konnte ich übrigens dieselbe Thatsache beim Alkohol und Wasserdampf constatiren.

Einige Zeit nachher angestellte Versuche haben gezeigt, dass Gemische von Luft und Dämpfen (Aether oder Alkohol) mitunter eine stärkere Schallleitung zeigen als Luft allein, jedoch auch nur bis zu einem bestimmten Sättigungsgrad, von welchem aufwärts die Bewegung wieder schwächer wird. Das Ergebniss ist also ein ähnliches, wie für Dämpfe allein.

Ich habe gefunden, dass Hr. Neyreneuf¹⁾ mit Hülfe seiner empfindlichen Flammen ebenfalls constatirt hat, dass durch Beimischung gewisser Dämpfe zu Luft ihre Leitungsfähigkeit für den Schall erhöht wird; derselbe erwähnt aber nichts darüber, dass die Schallleitung erst zu-, dann abnehme.

Als Ursache der erwähnten Schallschwächung in dem Apparate stellte sich ferner die Einwirkung scharfer metal-

1) Neyreneuf, Compt. rend. 96. p. 1312. 1883. u. Beibl. 7. p. 581 1883.

lischer Kanten heraus. Ursprünglich hatte ich nämlich das Rohr *BC* in Fig. 7 durch eine Messingplatte geschlossen, welche eine circa 20 mm weite Oeffnung hatte, sodass hierdurch, wie aus Taf. II Fig. 8 zu ersehen, eine scharfe Kante entstand.

Es genügte schon, einen etwas abgerundeten Kork innerhalb des Rohres vor die Messingplatte anzubringen, um die volle Stärke der Bewegung in dem Staubfigurenrohr wieder zu erhalten. Es gelang mir nicht, einen klareren Einblick in die zur Schallverminderung beitragenden Umstände zu gewinnen, und konnte ich mich auch nicht länger bei diesen Erscheinungen aufhalten.

Dass Hr. Kundt bei seinen Untersuchungen, wobei ähnliche Verhältnisse durch plötzliche Verengung der Röhren auftreten, keine Schallschwächung erwähnt, wird wohl daran liegen, dass er zu den Ueberführungen vom weiten zum engen Rohre Kork verwandte, dessen Kanten, wie ich gefunden habe, diesen Einfluss nur sehr wenig zeigen, ebenso wie auch die der Gummipfropfen.

Ich gab später der Messingröhre die trichterförmig abgerundete Form, wie sie in Figur 7 bei *C* angedeutet ist, und verstärkte den Ton ausserdem noch dadurch, dass ich das tönende Rohr durch eine grössere Platte verschloss, welche von der Wandung von *BC* rings nur etwa 1 mm abstand. Auf diese Weise erhielt ich dann eine recht starke Bewegung des Staubes.

Aehnliche Erscheinungen der Schallschwächung, wie die hier beschriebenen, beobachtete ich auch, wenn das Dampfrohr *CD* beim Rundschmelzen desselben an den Enden etwas eingezogen war. Ich hatte so häufig Gelegenheit, diese Thatsachen zu beobachten, dass eine Täuschung durch andere Zufälligkeiten wohl ausgeschlossen ist.

Man könnte diese Erscheinungen vielleicht durch Annahme von Wirbeln erklären, welche durch die scharfen Metallkanten hervorgerufen werden und einen Theil der lebendigen Kraft der Schallbewegung verschlucken.

Die Verdünnungsgrenze, bei welcher noch Bewegung des verkohlten Korkpulvers erhalten wurde, betrug für atmosphä-

rische Luft bei diesem Apparat 60 mm = 0,08 Atm., während die Figuren bei 90 mm = 0,12 Atm. bereits recht kräftig waren. Für Kieselsäure beginnt die Bewegung dagegen erst bei 250 mm, für gut ausgesprochene Figuren waren beinahe 400 mm erforderlich.¹⁾ Für andere Gase und Dämpfe wird die Verdünnungsgrenze bedingt durch ihre Dichte und den Sättigungsgrad, da, wie wir früher gesehen haben, die Schallbewegung bei Annäherung an die Sättigung bedeutend geschwächt wird. Abgesehen von letzterem Umstand würde man mit gesättigtem Alkoholdampf bei 28° Figuren erhalten müssen, mit Wasserdampf bei 65°, während der Aetherdampf bereits bei 0° eine Dichte besitzt, die weit über das verlangte Maass hinausgeht. Aus diesem Grunde ist auch letzterer Dampf am günstigsten für unsere Versuche, während Wasserdampf die ungünstigsten Verhältnisse darbietet.

Ich bemerke noch, dass die mit diesem Apparat angestellten Versuche anfänglich sehr schwankende Resultate lieferten, bis das Reservoir von R' nach R verlegt wurde (Fig. 7). Auf diese Weise musste nach dem Abbrechen der Kugel der Dampf die ganze Röhre durchstreichen und spülte so gewissermassen die darin noch enthaltene Luft hinweg, während man bei der früheren Anordnung eventuell ein unbekanntes Gemisch von Luft und Dampf erhielt. Um ganz sicher zu gehen, liess ich den Apparat immer so lange mit der Quecksilberpumpe in Verbindung, bis deutlich Flüssigkeit in dieselbe überdestillirte; dann wurde erst die Verbindungsröhre bei F abgeschmolzen.

Versuche mit Alkoholdampf.

Das specifische Gewicht des vorhandenen absoluten Alkohols war mittelst Pyknometer zu 0,7937 bei 20° gefunden, während dasselbe nach Mendelejeff²⁾ für denselben gleich 0,78945 ist. Daher liess ich diesen 98—99 Proc. haltigen Alkohol eine Zeit lang über geschmolzenem Chlorcalcium

1) Kundt (Pogg. Ann. 135, p. 550. 1868) konnte bei seinem Apparat auf 380 m Druck heruntergehen.

2) Mendelejeff, Pogg. Ann. 138, p. 270. 1869.

stehen und dann direct in die Flüssigkeitskugel überdestilliren. (Nach dem früher beschriebenen Verfahren.)

Von den Thermometern war das eine genau calibriert und in Bezug auf Eis- und Siedepunkt untersucht, die übrigen Thermometer waren mit diesem verglichen.

Die Versuche gelangen im allgemeinen ziemlich leicht, abgesehen von einigen unliebsamen Vorkommnissen bei den zuerst angestellten Versuchen, durch welche die Richtigkeit der Resultate zum Theil fraglich wurde.

So kann z. B. der Fall eintreten, dass nach dem Abbrechen der Kugelspitze eine schnelle Verdampfung der Flüssigkeit beginnt, welche das Pulver am Ende des Rohres wegbläst und dadurch die Messungen ungenau werden lässt. Um dies zu verhindern, hielt ich später beim Abbrechen der Spitze die Temperatur des Reservoirs möglichst niedrig.

Auf der anderen Seite konnte man mitunter auch bedeutenden Siedeverzug constatiren und wurde dann gewartet, bis Flüssigkeit in der Pumpe sich niederschlug.

Es würde indess zu weit führen, alle Vorsichtsmaassregeln anzuführen, die man bei der Anstellung eines Versuchs zu berücksichtigen hat.

In der folgenden Tabelle sind die Versuchsergebnisse mit Alkoholdampf, soweit sie brauchbar sind, zusammengestellt. Alle Berechnungen sind, wie früher angegeben, mittelst der Wahrscheinlichkeitsformel angestellt, und sind bei der Luft meistens 12 Knoten und ebensoviel Bäume gemessen, bei dem Dampf in der Regel noch mehr.

λ' ist die Figurenlänge in Luft auf 20° reducirt, λ diejenige in Dampf bei t_b° (Temperatur des Bades.) t_r gibt die Temperatur der kältesten Stelle (Reservoir) an. Reducirt man λ und λ' auf gleiche Temperatur und bildet ihr Verhältniss, so erhält man die für u/u' angegebene Zahl.

Die Versuche vom 5. März zeigen eine ganz gute Uebereinstimmung, und erst bei dem hier nicht angeführten Nr. 111 macht sich eindringende Luft geltend, und ich bin wohl berechtigt, die Zahlen, nur soweit zu benutzen, als sie constant bleiben.

Tabelle IV. Versuche mit Alkoholdampf.

| | Nr. | t_r | t_b | λ | λ' | u/u' | |
|----------------------|-----|-------|-------|-----------|------------|--------|-----------|
| 25. Febr. 1887. | 77 | 40,1 | 47,7 | 41,73 | 56,48 | 0,7062 | gesättigt |
| | 78 | 45,1 | 48,5 | 41,85 | 56,44 | 0,7078 | |
| | 79 | 47,9 | 48,6 | 41,46 | 56,29 | 0,7032 | |
| 3. März 1887. | 102 | 62,2 | 63,2 | 42,49 | 56,48 | 0,7023 | |
| | 103 | 63,7 | 64,0 | 41,93 | 56,41 | 0,6931 | |
| 5. März 1887. | 104 | 21,0 | 51,0 | 42,19 | 56,21 | 0,7138 | |
| | 105 | 37,0 | 50,9 | 42,25 | 56,39 | 0,7126 | |
| | 106 | 50,8 | 50,9 | 41,93 | 56,34 | 0,7078 | |
| | 107 | 51,2 | 51,4 | 42,01 | 56,40 | 0,7087 | |
| | 109 | 50,3 | 49,9 | 41,83 | 56,42 | 0,7062 | |
| | 110 | 50,9 | 50,6 | 41,95 | 56,48 | 0,7067 | |
| Masson ¹⁾ | | 78,5 | 78,5 | — | — | 0,6925 | |

Zwischen 107 und 109 ist zum zweiten mal ausgepumpt, und gewähren diese Versuche die gewünschte Controle, da die Zahlen vor und nach dem Auspumpen fast gleich sind.

Eine Erscheinung will ich noch erwähnen, welche die beim Aetherdampf gemachte Erfahrung bezüglich der Annäherung an eine gewisse Sättigungsgrenze bestätigt. Wurde nämlich eine bei F (Fig. 7) angebrachte Kugel zunächst sehr stark (auf etwa 10° C.) abgekühlt, so erhielt man wegen zu geringer Dichte des Dampfes gar keine Bewegung des Pulvers; bei einiger Erwärmung der Kugel entstand dann aber eine sehr starke (springende) Bewegung der Figuren, die bei weiter gehender Temperatursteigerung wieder viel schwächer wurden, sodass sich die Rippen nur eben etwas hoben. Dies konnte beliebig oft wiederholt werden.

Leider war die Zeit schon so vorgerückt, dass ich die Versuche mit Alkohol verlassen musste, nachdem festgestellt war, dass man ihn in ziemlich weiten Grenzen untersuchen kann, und auch der Sättigungszustand weiter keine Schwierigkeiten zu machen scheint.

Es schien aber erwünscht, sich noch darüber zu vergewissern, dass auch der Wasserdampf mit Hülfe dieses Apparates untersucht werden kann, und innerhalb welcher Grenzen dies möglich ist.

1) Siehe p. 166.

Versuche mit Wasserdampf.

Diese Grenzen zeigten sich, wie vorausszusehen war, als ziemlich enge, da man, um eine genügende Dichte zu erreichen, eine ziemlich hohe Temperatur als untere Grenze hatte, während man mit diesem Apparat nicht gut über 100° gehen konnte.

Mit gesättigtem Wasserdampf gelang es mir bis jetzt noch nicht, Figuren zu erhalten, und steht es noch dahin, ob dies vielleicht durch Verstärkung des Tons möglich ist. Sonst wäre wohl eine höhere Temperatur, wie sie bei dieser Einrichtung nicht herzustellen war, die nächste Bedingung zur Erreichung dieses Zwecks.

Bei manchen Glasröhren war ihre Attraction für den Wasserdampf sehr störend, sodass das Pulver nach kurzer Zeit an den Wänden kiebte, und der Versuch abgebrochen werden musste. Bei anderen zeigte sich dieser Uebelstand gar nicht. Ich schob aus diesem Grunde eine halbkreisförmige, innen versilberte Messingrinne in das Dampfrohr ein, in welcher sich dann das Pulver befand. Hierin waren auch die Figuren sehr gut zu messen. Mitunter konnte man bemerken, dass die Glaswände bereits ganz mit Feuchtigkeit beschlagen waren, während das Pulver in der Rinne noch beweglich blieb.¹⁾

Die wenigen bei diesen Untersuchungen gewonnenen Zahlen sind, soweit sie zuverlässig sind, in folgender Tabelle zusammengestellt; die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe, wie in Tab. VIII.

Tabelle V. Versuche mit Wasserdampf.

| | Nr. | t_r | t_b | λ | λ' | uu' |
|---------------|-----|-------|-------|-----------|------------|-------|
| 8. März 1887 | 124 | 76,1 | 92,3 | 75,39 | 56,45 | 1,196 |
| | 125 | 79,9 | 93,9 | 75,48 | 56,55 | 1,193 |
| 25. März 1887 | 163 | 87,1 | 96,6 | 76,59 | 56,28 | 1,212 |
| Masson | — | 95 | 95 | — | — | 1,204 |

1) Vielleicht ist auch das von Hrn Warburg zur Beseitigung der Hygroskopie der Röhren vorgeschlagene Verfahren, dieselben längere Zeit in kochendes Wasser zu legen, zu diesem Zwecke brauchbar.

Viele Versuchsreihen musste ich als ungünstig ansehen, da die erhaltenen Zahlen stets abnahmen, was auf eindringende Luft deutete. Das früher über die Annäherung an eine bestimmte Sättigungsgrenze Gesagte konnte ich auch beim Wasserdampf bestätigen.

In allen hier angestellten Versuchen blieb die statt des Kohlepulvers in einem kurzen Stück des Dampfrohres befindliche Kieselsäure unbewegt, und es würde also mit dieser kein einziger Versuch in Wasserdampf zu Stande gekommen sein.

Meine Zeit erlaubte es mir einstweilen nicht, diese Experimente weiter fortzuführen, da ich so lange durch die grossen Schwierigkeiten, die sich der Ausführung der Versuche entgegenstellten, aufgehalten worden war.

II. Ueber die Dampfdichte.

Um die Resultate der vorstehenden Beobachtungen zu verwerthen, müssen wir zunächst die Dichte des gesättigten wie des überhitzten Dampfes kennen. Während die erstere aus der mechanischen Wärmetheorie berechnet werden kann, hat man für den überhitzten Dampf noch keine Beziehungen aus derselben ableiten können.¹⁾

Gesättigter Dampf Aber auch bei der Berechnung der Dichte im Sättigungszustand stösst man auf eigenthümliche Schwierigkeiten. Berechnet man nämlich mit den von Regnault aufgestellten empirischen Formeln für die Verdampfungswärme und die Tension des Dampfes nach der bekannten Formel:

$$s = u + \sigma = \frac{Er}{T} \frac{\partial p}{\partial T} \quad 2)$$

das spezifische Volumen des Dampfes und hieraus seine relative Dichte bezogen auf Luft unter denselben Verhält-

1) Die Versuche von Zeuner in seiner *Mechan. Wärmetheorie* p. 426 1866 gründen sich auf das nur angenähert richtige Gesetz von Hirn, dass die isodynamische Curve des Dampfes eine gleichseitige Hyperbel sei.

2) Die Berechnung wird durch die von Zeuner l. c. aufgestellten Tabellen für u sehr vereinfacht.

nissen, so findet man, dass dieselbe bei manchen Dämpfen unter den Werth sinkt, welchen man aus dem Moleculargewicht berechnen kann.¹⁾

Von den Dämpfen, welche Regnault untersucht hat, sind für sieben derselben alle zur Berechnung der Dichte nöthigen Daten vorhanden. Diese sind: die Dämpfe von Wasser, Alkohol, Aether, Aceton, Chloroform, Chlorkohlenstoff und Schwefelkohlenstoff.²⁾

Ich fand bei allen diesen anomale Abweichungen und gebe zunächst eine Tabelle für die relative Dichte derselben nach obiger Formel bei verschiedenen Temperaturen (*MD* bedeutet darin die aus dem Moleculargewicht berechnete Dichte).

Tabelle VI. Relative Dampfdichte (bei Sättigung)
nach der mechanischen Wärmetheorie.

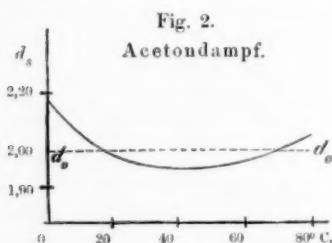
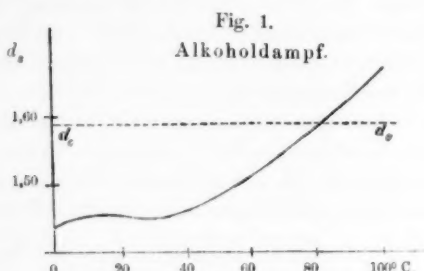
| <i>t</i> | H ₂ O | C ₂ H ₅ (OH) | C ₄ H ₁₀ O | C ₃ H ₆ O | CHCl ₃ | CCl ₄ | CS ₂ |
|-----------|------------------|------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|-------------------|------------------|-----------------|
| 0° | 0,6065 | 1,442 | 2,503 | 2,179 | 4,158 | 5,473 | 2,611 |
| 10 | 0,6126 | 1,451 | 2,527 | 2,063 | 4,125 | 5,447 | 2,618 |
| 20 | 0,6176 | 1,448 | 2,548 | 1,999 | 4,109 | 5,422 | 2,633 |
| 30 | 0,6215 | 1,449 | 2,570 | 1,969 | 4,109 | 5,409 | 2,653 |
| 40 | 0,6247 | 1,460 | 2,592 | 1,960 | 4,117 | 5,400 | 2,672 |
| 50 | 0,6273 | 1,482 | 2,616 | 1,966 | 4,135 | 5,405 | 2,700 |
| 60 | 0,6295 | 1,512 | . . . | 1,983 | 4,158 | 5,416 | 2,730 |
| 70 | 0,6317 | 1,545 | . . . | 2,005 | 4,184 | 5,442 | . . . |
| 80 | 0,6340 | 1,585 | . . . | 2,034 | . . . | 5,480 | . . . |
| 90 | 0,6369 | 1,619 | . . . | . . . | . . . | 5,535 | . . . |
| 100 | 0,6401 | 1,652 | . . . | . . . | . . . | . . . | . . . |
| <i>MD</i> | 0,6233 | 1,593 | 2,562 | 2,009 | 4,139 | 5,333 | 2,632 |

Man sieht, dass einige von ihnen Minima zeigen, von denen an erst die Dichte wieder aufwärts geht; für den Alkoholdampf bleibt die Dichte besonders lang unter der aus dem Moleculargewicht (*MD*) berechneten.

1) Gleiches hat, wie ich sehe, Hr. R. v. Helmholtz (Wied. Ann. 30. p. 401. 1887) für den Wasserdampf bei seinen Untersuchungen über die Dampfspannung des Eises constatirt und deshalb für die Verdampfungswärme desselben eine neue Formel aufgestellt. Ferner auch Herwig (Pogg. Ann. 134. p. 48. 1869) und Hr. Winkelmann, auf dessen Arbeit ich gleich zurückkommen werde.

2) Von Benzin ist nur die spezifische Wärme der Flüssigkeit nicht bestimmt.

Die Figuren 1 und 2 geben die graphische Darstellung dieser Werthe für Alkohol und Acetondampf; für die übrigen Dämpfe erhält man ähnliche Curven. (Die Gerade d_o entspricht MD vor. Tab.)



Da die Formel aus der Wärmetheorie doch jedenfalls keinem Zweifel unterliegt, und wohl auch die Spannkraftbestimmungen von Regnault ziemlich zuverlässig sind, so kann der Grund dieser Widersprüche nur in der von Regnault bestimmten Verdampfungswärme liegen.

Ich war daher erfreut, eine Arbeit von Hrn. Winkelmann¹⁾ vorzufinden, in der bereits die Regnault'schen Zahlen und Formeln bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Abhängigkeit der Temperatur vom Druck einer eingehenden Kritik unterworfen sind.

Nur den Alkoholdampf zieht er nicht mit in Betracht und erwähnt ihn auch nicht unter den Substanzen, für die alle nöthigen Daten zur Berechnung vorliegen; vielleicht des-

1) Winkelmann, Wied. Ann. 9. p. 208 u. 358. 1881.

halb, weil Regnault für die Gesamtwärme der Verdampfung bei ihm wegen des unregelmässigen Verlaufs der Curve keine empirische Formel aufstellte.

Hr. Winkelmann spricht sich folgendermassen über die Ergebnisse seiner Untersuchungen aus¹⁾: „Ich habe zu meinem Erstaunen gefunden, wie wenig genügend Regnault seine zahlreichen experimentellen Daten durch empirische Formeln darzustellen gewusst hat. Ich bin überzeugt, dass in dieser Beziehung die Resultate Regnault's vielfach überschätzt sind, weil die Genauigkeitsgrenzen seiner Versuche nicht bestimmt sind“.

Er sieht sich deshalb veranlasst, neue Formeln für die Verdampfungswärme aufzustellen und daraus die Dichte zu berechnen. Dies hat ihn besonders bei Wasserdampf, für den ja die genauesten Bestimmungen vorliegen, zu einem guten Resultat geführt, sodass der frühere Widerspruch, der in den aus der Theorie berechneten Dichten lag, aufgehoben ist.

Freilich musste Hr. Winkelmann dabei die Versuche Regnault's, die sich auf die Temperatur von -2 bis $+16^{\circ}$ erstrecken und nach einer ungenaueren Methode²⁾ ausgeführt sind, als die übrigen, verwerfen und statt dessen die erste Constante der aufgestellten Gleichung so bestimmen, dass er bei 0° die gewünschte theoretische Dichte bekam. Durch wirkliche Versuche in den Temperaturen unter 63° ist also diese Formel auch nicht gestützt, was doch hervor-gehoben werden muss.

Statt der bekannten linearen Gleichung von Regnault für die Gesamtverdampfungswärme $\lambda = 606,5 - 0,305 t$ stellt Hr. Winkelmann eine solche mit vier Constanten auf, woraus indess für die Verdampfungswärme r keine weitere Complication entsteht, da die Flüssigkeitswärme bereits vier Constanten besitzt, und r aus dieser und λ durch $r = \lambda - \int_0^t c dt$ zu berechnen ist. Diese Formel für λ lautet³⁾:

1) Winkelmann, l. c. p. 208.

2) Verdampfenlassen aus dem Calorimeter, beschrieben Rel. des expér. 1. p. 712. 1862.

3) Winkelmann, l. c. p. 231.

$\lambda = 589,5 + 0,7028 t - 0,003 194 7 t^2 + 0,0,8447 t^3$
und hieraus die Verdampfungswärme:

$$r = 589,5 - 0,2972 t - 0,003 214 7 t^2 + 0,0,8147 t^3. 1)$$

Hr. Winkelmann weist nach, dass sich die nach seiner Formel für λ berechneten Werthe den beobachteten durchgängig viel besser als die Regnault'schen anschliessen, sodass es sich sehr empfehlen wird, diese neuen Formeln für r und λ bei allen weiteren Berechnungen zu benutzen.

Im Folgenden sind einige Zahlen aus der von Winkelmann gegebenen Tabelle²⁾ für die Dichte nach der alten und neuen Formel für r angeführt.

Tabelle VII. Relative Dichte des Wasserdampfes nach Winkelmann.

| Atm. | Temp. | Dichte nach | |
|-----------------|--------|-------------|------------|
| | | Regnault | Winkelmann |
| $\frac{1}{100}$ | 13,95 | 0,61077 | 0,62344 |
| $\frac{1}{100}$ | 25,14 | 0,61427 | 0,62370 |
| $\frac{1}{100}$ | 37,31 | 0,61836 | 0,62506 |
| $\frac{1}{100}$ | 50,64 | 0,62283 | 0,62717 |
| $\frac{1}{100}$ | 65,36 | 0,62780 | 0,63024 |
| $\frac{1}{100}$ | 81,71 | 0,63357 | 0,63501 |
| $\frac{1}{100}$ | 100 | 0,64016 | 0,64103 |
| 2 | 133,91 | 0,64836 | 0,64926 |

Die Dichte im Gaszustand ist zu 0,62344 angenommen. Die Tabelle ist nach Atmosphärendruck geordnet, doch lassen die beigeschriebenen Temperaturen auch leicht die Vergleichung mit anderen Anordnungen zu.

Eine Bestätigung für die Richtigkeit dieser von ihm berechneten Zahlen findet Winkelmann in der aus ihnen und dem Druck nach seiner Formel abgeleiteten Temperatur, die nirgends mehr als $0,5^0$ von der beobachteten abweicht.

Für die anderen Dämpfe ist das Ergebniss indess kein so günstiges. Trotz besser stimmender Formel für λ erhält er z. B. beim Aetherdampf Werthe für die Dichte, welche

1) Die von Hrn. R. v. Helmholtz für r aufgestellte, unterhalb des Gefrierpunktes geltende Gleichung ist: $r = 597 - 0,65 t$. (Siehe Anm. 1 p. 185.)

2) Winkelmann, l. c. p. 237.

selbst bei einem Atmosphärendruck noch unter der theoretischen liegen.

Nach Hrn. Winkelmann kann dies verschiedene Ursachen haben. Zunächst liegen die Spannkraftsbestimmungen und die der Verdampfungswärme um mehrere Jahre auseinander, sodann ist die Bestimmung der specifischen Flüssigkeitswärme ziemlich unsicher, sodass selbst in niederen Temperaturen die Fehler 1 Proc. betragen können. Ferner wäre es auch möglich, dass die Dämpfe in den betreffenden Temperaturen gar nicht die chemische Zusammensetzung haben, die man bei Berechnung ihres Moleculargewichts voraussetzt.

Es wäre daher sehr wünschenswerth, die Dichte des Dampfes im Gaszustande aus experimentellen Bestimmungen zu kennen. Eine genauere Besprechung aller dieser Umstände findet man in der citirten Arbeit des Hrn. Winkelmann.

Nicht behandelt ist in diesen Untersuchungen der Alkoholdampf, für den ich daher auf die directen Beobachtungen von Regnault zurückgehen will. Ich möchte gleich daran erinnern, dass der Alkohol ein sehr exceptioneller Körper ist; so sagt z. B. einmal Regnault von ihm¹⁾:

„Uebrigens ist es schwierig, den Alkohol im Zustand der Reinheit zu erhalten, und hat mir diese Flüssigkeit in allen physikalischen Experimenten, denen ich sie unterwarf, Anomalien gezeigt.“

Sehr grosse Unregelmässigkeiten zeigt, wie schon erwähnt, der Alkohol in Bezug auf die Gesamtwärme der Verdampfung, sodass Regnault annimmt, es könnten moleculare Veränderungen während des Siedens stattfinden. Die directen Versuchsergebnisse für die Gesamtverdampfungswärme finden sich in der Tabelle l. c. p. 818, während die von 10 zu 10°, wie bei den übrigen Dämpfen, angeführten Werthe, welche Zeuner in seiner Wärmetheorie als die directen Angaben Regnault's bezeichnet, einer graphischen Darstellung entnommen sind. Die danach gezeichnete Curve hat nicht, wie die der anderen Dämpfe, einen angenähert geradlinigen Verlauf, sondern besitzt einen Wendepunkt, indem sie eine Zeit lang

1) Regnault, l. c. p. 819.

(etwa von 55—85°) der Abscissenaxe (t) parallel läuft und dann erst wieder ansteigt.

Aus diesen direct beobachteten Werthen von λ wurde r berechnet mit Hülfe der von Regnault (p. 270) für die Flüssigkeitswärme q aufgestellten empirischen Gleichung.

Zur Ermittlung von u wurde der Factor $AT \cdot \partial p / \partial T$ nach der von Zeuner¹⁾ aufgestellten empirischen Formel:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T} = m\alpha^x + n\beta^x,$$

und unter Annahme des Werthes 424 kgm für das Wärmeäquivalent²⁾ berechnet.

Das spezifische Volumen $s = u + \sigma$ ergibt sich dann vermittelst der für das Flüssigkeitsvolumen von Hirn³⁾ aufgestellten Gleichung:

$$\sigma = \sigma_0 (1 + at + bt^2 + ct^2 + dt^4).$$

In folgender Tabelle sind die so gewonnenen Zahlen zusammengestellt. Es bedeutet D und D' die absolute Dichte des Dampfes, resp. der Luft (bezogen auf Wasser von 4° C.); $d = D/D'$ die relative Dichte des Dampfes auf Luft bezogen.

Tabelle VIII. Dichte des Alkoholdampfes
nach Regnault's Zahlen.

| t° | r | u | σ | D | D' | d | Datum |
|----------------------|--------|---------|----------|-----------|---------|--------|------------|
| -2,10 | 233,65 | 36,5883 | 0,0012 | 0,027 331 | 0,01858 | 1,4471 | April 1853 |
| +1,00 | 234,82 | 29,4633 | 12 | 0,033 940 | 0,02331 | 1,4561 | " " |
| 33,10 | 239,87 | 4,5676 | 13 | 0,218 87 | 0,15068 | 1,4526 | Mai 1856 |
| 62,68 | 225,26 | 1,1925 | 13 | 0,837 66 | 0,54956 | 1,5243 | " " |
| 77,95 | 214,98 | 0,63920 | 13 | 1,561 3 | 0,99230 | 1,5626 | " " |
| 104,5 | 197,88 | 0,25610 | 132 | 3,884 7 | 2,3531 | 1,6509 | " " |
| 124,8 | 184,20 | 0,13301 | 136 | 7,442 2 | 4,3523 | 1,7099 | " " |
| 137,55 | 178,00 | 0,09514 | 139 | 10,359 5 | 6,0131 | 1,7228 | Juni 1856 |
| 153,45 | 167,62 | 0,06411 | 152 | 15,237 0 | 8,6642 | 1,7586 | " " |
| Dichte im Gaszustand | | | | | | 1,5930 | |

1) Zeuner, l. c. p. 259.

2) Diese Zahl ist wahrscheinlich noch zu klein, sodass die Dichte mit dem richtigeren Werth noch kleiner wird (vgl. hierzu die Bestimmungen des Wärmeäquivalentes von Rowland: Proc. of the Amer. Acad. New Ser. 7. p. 196. 1880). Doch wird sonst meistens mit dieser Zahl gerechnet (Clausius, Zeuner), sodass ich sie auch hier benutzt habe.

3) Hirn, Ann. de chim et de phys. (4) 10. p. 32. 1867.

Die beiden Bestimmungen der Gesamtverdampfungswärme bei niedriger Temperatur wurden nach dem p. 779 der Relat. des exp. beschriebenen Verfahren durch Verdampfenlassen der Flüssigkeit aus dem Calorimeter angestellt. Sie liegen, wie man sieht, mehr als drei Jahre von den anderen Versuchen entfernt. Die Spannkraftsbestimmungen sind bereits in den Jahren 1844 und 1847 ausgeführt, sodass wohl verschiedene Präparate benutzt sind.

Man erkennt aus vorstehender Tabelle, dass die Verdampfungswärme r erst zu-, dann abnimmt und dementsprechend die relative Dichte ein erstes Maximum aufweist. Die letztere bleibt bis zum Siedepunkt ($78,3^0$) unterhalb der theoretischen Dichte 1,593, sodass wir auch mit Weglassung der beiden Versuche in niedriger Temperatur — analog dem Verfahren von Winkelmann bei Wasserdampf — keine Formel für r aufstellen können, die für d bessere Werthe liefert.

Hier wäre es somit besonders erwünscht, die Dichte des Dampfes im Gaszustande auch unterhalb des Siedepunktes aus experimentellen Bestimmungen zu kennen. Die angeführten Versuche von Regnault sind jedenfalls nicht ausreichend, um die Dichte des Alkoholdampfes aus ihnen mit Sicherheit zu berechnen.

Ich will daher diese Betrachtungen, die uns nur bei Wasserdampf zu einem befriedigenden Resultat geführt haben, verlassen, um zu untersuchen, welche Ergebnisse für die Dichte eines Dampfes aus rein theoretischen Betrachtungen über den Zusammenhang zwischen Druck, Volumen und Temperatur desselben abzuleiten sind.

Dichte der Dämpfe, aus der Zustandsgleichung von
Clausius abgeleitet.

Auf Grund der kinetischen Gastheorie hat Clausius¹⁾ die von van der Waals aufgestellte Zustandsgleichung zwischen Druck, Volumen und Temperatur erweitert und verbessert, um sie dem Verhalten der Dämpfe besser anzupassen,

1) Clausius, Wied. Ann. 14. p. 273 u. 692. 1881.

und gelangte nach einigen Umformungen schliesslich zu der Gleichung:

$$(I) \quad \frac{p}{RT} = \frac{1}{v-a} - \frac{27\gamma}{8\vartheta(v+\beta)^2},$$

worin die Temperaturfunction ϑ zu setzen ist:

$$(II) \quad \vartheta^{-1} = aT^{-n} - b.$$

In diesen Gleichungen sind $\alpha, \beta, \gamma = \alpha + \beta$, a, b und n Constanten, die von der Natur des Gases abhängen, R ist die Gasconstante, T die absolute Temperatur, p und v Druck und Volumen.

Da diese Gleichung sich im allgemeinen den Beobachtungen gut anschliesst und jedenfalls dem wirklichen Verhalten der Dämpfe sich mehr nähert, als die anderen, so habe ich sie als Grundlage aller weiteren Berechnungen genommen.

Um den Druck des gesättigten Dampfes aus der angeführten Relation zwischen p und v zu berechnen, weist Clausius nach, dass die beim Durchlaufen der Curve $p=f(v)$ geleistete Arbeit $\int p dv$ gleich sein muss der dem wirklichen Condensationsvorgang entsprechenden $P(s-\sigma)$, worin s und σ die Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit, P den Sättigungsdruck bezeichnen.

Sowohl Clausius¹⁾ selbst, als auch Hr. Planck²⁾ haben mit Hülfe dieser Bedingung unter Einführung transcenderenter Variablen die ursprüngliche Gleichung weiter behandelt und für die Berechnung des Druckes und Volumens des gesättigten Dampfes Tabellen aufgestellt. Doch kann ich hier aus Mangel an Raum nicht näher auf diese Berechnungen eingehen; eine kurze Zusammenfassung derselben habe ich in meiner Dissertation³⁾ gegeben, auf die ich auch hinsichtlich einer ausführlicheren Darlegung des Folgenden in mehreren Punkten hinweisen muss.

Für den Aether- und Wasserdampf hat Clausius

1) Clausius, l. c. p. 284.

2) Planck, Wied. Ann. 13. p. 535. 1881.

3) W. Jaeger, Ueber die Schallgeschwindigkeit in Dämpfen etc. Inauguraldiss. Berlin, 6. Aug. 1887.

die Constanten α, β, γ etc. berechnet und die Werthe von P (in Atmosphären), verglichen mit den beobachteten, sowie die von s und σ angegeben.

Bei dem Aetherdampf benutzte er dazu die Daten von Sajotschewsky¹⁾ für den kritischen Zustand, beim Wasserdampf liegen Beobachtungen über denselben nicht vor, und berechnete Clausius den wahrscheinlichsten Werth der Constanten a, b, n aus den Regnault'schen Spannkraftsbestimmungen in den höchsten Temperaturen (220°).

Mit Hülfe der von Clausius angegebenen Zahlen für P (berechnet) und s habe ich die relative Dichte des Aether- und Wasserdampfes berechnet und fand, dass die so erhaltene Curve sich, wie gewünscht, bei niederen Temperaturen der theoretischen Dichte nähert; doch auch hierbei gelangen die niedrigsten Werthe der so berechneten Dichte unter die des Gaszustandes, welche der Berechnung zu Grunde gelegt ist.

Wegen der grossen Complicirtheit der angewandten Formeln bedarf es einer näheren Untersuchung, um zu entscheiden, ob die nach denselben berechneten Werthe von d , (relative Dichte im Sättigungszustand) unter den theoretischen Werth sinken können oder nicht, um dann womöglich eine schärfere Berechnungsweise anzuwenden.

Die zur Berechnung benutzten Grössen H/H_c und W/W_c , für welche Clausius Tabellen aufgestellt hat, hängen nämlich noch durch den Werth von γ zusammen, indem $H_c = \frac{1}{2}\gamma$ und $W_c = 2\gamma$ ist, und durch diesen ist W , also auch die Dichte bestimmt.

Es ergibt sich die Relation:

$$(III) \quad \left(\frac{H}{H_c}\right)\left(\frac{W}{W_c}\right) = 4HW = 4 \frac{P(s-\alpha)}{RT}.$$

Die gesuchte Grösse s hängt somit von dem Product $(H/H_c)(W/W_c)$ ab, welches wir kurz mit Z bezeichnen wollen.

Da ferner P/RT gleich der absoluten Dichte im Gaszustand, oder gleich dem reciproken specifischen Gas-

1) Sajotschewsky, Beibl. 3. p. 741. 1879.

2) Der Index c bedeutet den Werth der betreffenden Grösse für den kritischen Zustand, es ist $H = p/RT$, $W = s - \alpha$, analog $w = \sigma - \alpha$.

volumen ist, das wir mit s_0 bezeichnen wollen, so haben wir die einfache Relation:

$$(III_a) \quad \frac{s - \alpha}{s_0} = \frac{1}{4} \left(\frac{H}{H_c} \right) \left(\frac{W}{W_c} \right) = \frac{1}{4} Z,$$

und da $s - \alpha = W$ ist, folgt für letzteres:

$$(III_b) \quad W = s_0 \frac{Z}{4}.$$

Da für niedere Temperaturen, in denen s gross ist, α gegen dasselbe vernachlässigt werden kann¹⁾, so muss, wenn die Dichte des Dampfes nicht unter die theoretische sinken soll, die Bedingung gelten:

$$(IV) \quad s \leq s_0 \quad \text{oder auch:} \\ (IV_a) \quad Z \leq 4.$$

Wir haben zu untersuchen, ob der Werth von Z dieser Bedingung genügt, oder ob daraus weitere Folgerungen entspringen.

Aus der von Clausius angegebenen Formel:

$$H = \frac{1}{W + w + 2\gamma} \left(1 - \frac{\gamma^2}{W \cdot w} \right)$$

folgt, unter Beachtung, dass $W/w = e^\lambda$ eingeführt war, und mit Berücksichtigung der Werthe von H_c und W_c :

$$(V) \quad Z = 4 \frac{1 - \frac{e^\lambda}{x^2}}{1 + e^{-\lambda} + \frac{1}{x}},$$

worin ich W/W_c mit x bezeichnet habe.

Für die kritische Temperatur ist, da²⁾ hier $\lambda = 0$, $x = 1$, $\vartheta = 1$ sind: $Z = 1$.

1) Z. B. ist für Aether $\alpha = 0,0011 \dots$ und für -20°C . $s = 3,18 \text{ cbm}$, bei Wasser ist das Verhältniss noch viel günstiger.

2) Dass für die kritische Temperatur $\vartheta = 1$ etc. ist, lässt sich kurz so zeigen: Aus Gleichung I. p. 192 wird durch Einführung der anderen Buchstaben für die kritische Temperatur:

$$H_c = \frac{1}{W_c} - \frac{27\gamma}{8\vartheta(W_c + \gamma)^2};$$

da aber $H_c = 1/8\gamma$, $W_c = 2\gamma$ ist, folgt $\vartheta = 1$.

Ebenso wegen $w_c = W_c = 2\gamma$ aus $W = we^\lambda$, dass $\lambda = 0$ ist, $x = 1$ ist selbstverständlich wegen $W = W_c$ für den kritischen Zustand.

Für kleine Werthe von ϑ dagegen nähert sich $e^{-\lambda}$ und $1/x$, da λ und x unendlich werden, der Null; ebenso auch die Grösse e^{λ}/x^2 , wie folgende Werthe derselben zeigen:

$$\begin{aligned}\vartheta &= 0,25 \dots e^{\lambda}/x^2 = 0,0,78 \\ &'' = 0,20 \dots '' = 0,0,4.\end{aligned}$$

Daher nähert sich in der That Z für immer kleiner werdende ϑ der Grenze 4, während es bei $\vartheta = 1$ den Werth 1 hat.

Somit ist obige Bedingung $Z \leq 4$ immer erfüllt, und die aus dieser Gleichung von Clausius berechnete Dichte kann nie kleiner werden als die theoretische.

Es muss also in den Angaben oder Berechnungen von Clausius für s irgendwo ein Fehler stecken, den ich auch durch Nachrechnen gefunden zu haben glaube.

Bilden wir nämlich aus den von Clausius für den Aetherdampf von -20° angeführten Grössen $s = 3,182$ und $P = 0,0881$ den Werth von Z , so finden wir ihn zu 4,003, also grösser als 4, was nach der Beschaffenheit von Z , wie wir gesehen haben, nicht möglich ist.

Es ergibt sich weiter der Werth von ϑ für diese Temperatur aus den angegebenen Constanten a, b, n zu $\vartheta = 0,34890$ und, wie sich herausgestellt hat, liefert derselbe bei geradliniger Interpolation aus der Tabelle von Clausius den oben angegebenen Werth s . Die Werthe von (H/H_c) und (W/W_c) ändern sich aber, besonders für kleine ϑ , viel zu rasch, um für unsere Zwecke eine geradlinige Interpolation zu gestatten, daher sind beide fehlerhaft und ihr in Frage kommendes Produkt erst recht.

Schärfere Berechnungsweise der Dichte.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergibt sich ein einfacher Weg, um mit Hülfe der Grösse Z die Dichte direct zu erhalten.

Aus der Relation (III_a) $(s - \alpha)/s_0 = Z/4$ erhalten wir für die relative Dichte des gesättigten Dampfes (d_s):

$$(VI) \quad \frac{1}{d_s} = \frac{1}{d_0} \left\{ \frac{Z}{4} + \frac{\alpha}{s_0} \right\}.$$

worin d_o wieder die relative Dichte im vollkommenen Gaszustand bezeichnet.

Wegen: $s_o = 1/H = 8\gamma/(H/H_c)$
können wir dies auch schreiben:

$$(VI_a) \quad \frac{1}{d_s} = \frac{1}{d_o} \left\{ \frac{Z}{4} + \frac{\alpha}{8\gamma} \left(\frac{H}{H_c} \right) \right\}.$$

Das zweite Glied der Klammer ist ein Maximum für $Z = 1$ (kritische Temperatur), und wir erhalten dann:

$$\frac{1}{d_s} = \frac{1}{d_o} \left\{ 0,25 + \frac{\alpha}{8\gamma} \right\}.$$

Für Aether ist der Klammerwerth 0,32835 und daher für die kritische Temperatur:

$$d_s = 3,046 d_o.$$

Für niedrige Temperaturen (kleine ϑ) ist dagegen das zweite Glied verschwindend klein und $Z = 4$, somit:

$$d_s = d_o.$$

Um nach obenstehender Formel d_s leicht berechnen zu können, muss man aber für $Z = (H/H_c)(W/W_c)$ ebensolche Tabelle besitzen, wie sie Clausius für (H/H_c) und (W/W_c) aufgestellt hat.

Eine solche Tabelle habe ich nach der früher für Z aufgestellten Formel (V) berechnet, wobei ich die Werthe $x = (W/W_c)$ der Tabelle von Clausius entnahm.¹⁾

Die Tabelle für Z (man findet sie am Ende dieser Abhandlung) ist ebenso wie die Tabelle von Clausius ganz allgemein gültig und gestattet eine bequeme Berechnung von d_s . Man findet noch die Differenzen Δ in derselben angegeben und kann erkennen, dass die zweiten Differenzen eine Zeit lang constant bleiben.

Mit Hilfe dieser Tabelle habe ich im folgenden zunächst für Aetherdampf d_s und s nach den Formeln III_a und VI_a bis zur kritischen Temperatur (190°) berechnet.²⁾

1) Nur für $\vartheta = 0,8$ bis $\vartheta = 1$ habe ich die als Produkt $H/H_c)(W/W_c)$ berechneten Werthe beibehalten, da sie regelmässige Differenzen lieferten.

2) Die hier für die Dichte des Aetherdampfes erhaltenen Zahlen sind durchweg bedeutend grösser, als die von Winkelmann nach seiner neuen Formel für die Verdampfungswärme berechneten (siehe p. 186).

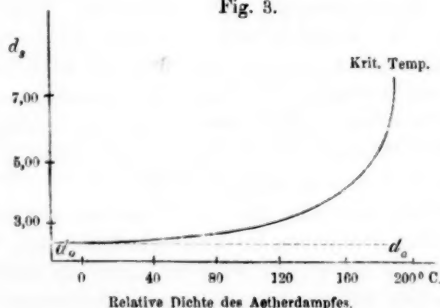
Tabelle IX. s und d_s für Aetherdampf.
Nach neuer Berechnung.

| t° | s | d_s | t° | s | d_s |
|-----------|--------|--------|-----------|----------|--------|
| -20 | 3,161 | 2,5732 | 100 | 0,05412 | 2,9771 |
| 0 | 1,2305 | 2,5895 | 120 | 0,03405 | 3,1839 |
| 20 | 0,5542 | 2,6182 | 140 | 0,02174 | 3,4928 |
| 40 | 0,2784 | 2,6644 | 160 | 0,01373 | 4,0018 |
| 60 | 0,1523 | 2,7336 | 180 | 0,008008 | 5,1016 |
| 80 | 0,0869 | 2,8341 | 190 | 0,004558 | 7,7974 |

Dichte im Gaszustand $d_o = 2,5604$.

Figur 3 zeigt die Curve für d_s nach Tabelle IX und deren Anwachsen mit der Temperatur bis zum kritischen Punkt.

Fig. 3.



Für den Wasserdampf ist unter Annahme des kritischen Zustandes, den Clausius als den wahrscheinlichsten berechnet hat, $\alpha/8\gamma = 0,003\,668$, und für die grösste erreichte Dichte, nämlich die im kritischen Zustand, ist dann:

$$\frac{d_s}{d_o} = 3,4882.$$

Die Berechnung von s und d_s nach den angeführten Formeln liefert Werthe, die nur wenig von den von Clausius angegebenen sich unterscheiden, und führe ich sie daher hier nicht an. Gegen die von Winkelmann berechneten Werthe d_s sind jedoch die hier erhaltenen zu klein, und da sich diese Berechnung auf einen nur hypothetischen kritischen Zustand stützt, so werden wir beim Wasserdampf den

nach Winkelmann's neuer Formel berechneten Zahlen den Vorzug geben dürfen.

Alkoholdampf; Berechnung der Constanten.

Der Alkoholdampf, für den Clausius die Constanten der Zustandsgleichung nicht bestimmt hat, ist in Bezug auf seinen kritischen Zustand von Sajotschewsky¹⁾ und Hannay²⁾ untersucht.

Ersterer fand:

$$t_c = 234,3^{\circ} \text{ C.}, \quad P_c = 62,1 \text{ Atm.},$$

während nach Hannay zu setzen ist:

$$t_c = 234,3^{\circ} \text{ C.}, \quad P_c = 64,5 \text{ Atm.}$$

Unter Zugrundelegung der bekannten Drucke (Regnault) für die Temperaturen 0° , $78,3^{\circ}$ (Siedepunkt) und $234,3^{\circ}$ (kritische Temperatur) berechnete ich nach beiden Angaben für den kritischen Zustand die Constanten a , b , n der Temperaturfunction, erhielt aber, auch bei strenger Interpolation aller Werthe, für die Spannungen keine Curve, die sich der beobachteten genügend anschloss.³⁾

Es scheint, dass sich die von Clausius gewählte Temperaturfunction (Gleichung II) nicht genügend den Beobachtungen anpassen lässt, und wäre es eigentlich nöthig, eine andere Function aufzusuchen, die unsere Forderung in besserer Weise erfüllt.

Da wir aber damit nur erreichen würden, dass sich die berechneten P den beobachteten möglichst nähern, so können wir einstweilen die beobachteten Werthe P selbst zur Berechnung der Dichte mit Zuhülfenahme der kritischen Temperatur verwenden.

Wir müssen noch die übrigen Constanten α , β , γ der Gleichung (I_c) berechnen, da sie in der Formel für d_s vorkommen. Die für den Gaszustand angenommene Dichte ist $d_0 = 1,5930$, sodass wir haben:

1) Sajotschewsky, Beibl. 3. p. 742. 1879.

2) Hannay, Proc. Roy. Soc. 30. p. 478. 1880.

3) Die genaueren Angaben hierüber in meiner Dissertation.

$$R = \frac{R'}{d_0} = \frac{29,273^1)}{1,593} = 18,378.$$

Hieraus folgt weiter:

$$H_c = \frac{P_c}{RT_c} = 68,834$$

und wegen $H_c = 1/8 \gamma : \gamma = 0,0018160$.

Die Constante α ergibt sich aus $\alpha = \sigma - w$, und für σ sind die Angaben von Mendelejeff²⁾ über das specifische Gewicht des Alkohols benutzt; man erhält hieraus:

$$\text{für } 0^\circ \dots \sigma = 0,00124032,$$

$$\text{„ } 20^\circ \dots \sigma = 0,00126700.$$

Aus diesen beiden Zahlen und den zu 0° und 20° gehörigen w findet sich α im Mittel zu:

$$\alpha = 0,0010579,$$

und daher wegen $\alpha + \beta = \gamma$:

$$\beta = 0,0007581.$$

Die in VI_a für d_s vorkommende Grösse $\alpha/8\gamma$ beträgt 0,07282, sodass für die kritische Temperatur ($H/H_c = 1$) das Verhältniss der Dichten ist:

$$\frac{d_s}{d_0} = 3.0977.$$

Mit Hülfe dieser Constanten habe ich die Dichte d , für einige Temperaturen berechnet, und findet man in folgender Zusammenstellung die aus den beobachteten Werthen von P berechneten neben den aus der Temperaturfunction abgeleiteten aufgeführt.

Tabelle X. Relative Dichte des Alkoholdampfes (d_s) nach verschiedenen Berechnungsweisen.

| t° | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 155 | 234,3 |
|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|
| Aus β | 1,5942 | 1,5964 | 1,6016 | 1,6117 | 1,6296 | 1,6588 | 1,7042 | 1,7728 | — | 4,9347 |
| „ Beob. P | 1,5942 | 1,5963 | 1,6014 | 1,6114 | 1,6296 | 1,6594 | 1,7050 | 1,7719 | 1,8400 | 4,9347 |
| d | 0 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0 | -0,0006 | -0,0008 | 0,0009 | — | 0 |

(Dichte im Gaszustand $d_0 = 1,5930$ angenommen.)

1) Berechnet aus der absoluten Dichte 1,2930 der Luft bei 0° und 760 mm.

2) Mendelejeff, Pogg. Ann. 138. p. 250. 1869.

Man erkennt hieraus, dass die Wahl der Temperaturfunction ϑ für die Bestimmung von d , fast ohne Einfluss ist, und dass man berechtigt ist, letzteres aus den beobachteten P direct ohne Ermittlung der Constanten a , b und n zu berechnen.

Dichte der gesättigten Dämpfe nach experimentellen
Bestimmungen.

Einige experimentelle Bestimmungen der Dampfdichte und darauf basirende empirische Formeln möchte ich noch mit den vorangehenden Berechnungen vergleichen.

Die schönen Untersuchungen von Fairbairn und Tate über die Dichte des gesättigten Wasserdampfes¹⁾, auf Grund deren jene auch eine empirische Formel für das Volumen desselben als Function des Druckes aufgestellt haben, stimmen, wie Clausius²⁾ bereits nachgewiesen hat, in recht befriedigender Weise mit den aus der mechanischen Wärmetheorie berechneten Werthen und sind eine gute Bestätigung derselben. Es sei mir daher erspart, hier eine nochmalige Vergleichung mit den aus der Verdampfungswärme für d , berechneten Zahlen anzustellen, und ziehe ich es vor, die letzteren nach dieser strengen, aus der Wärmetheorie folgenden Relation zu berechnen, als nach einer empirischen Formel.

Doch will ich noch die von Hrn. Herwig³⁾ für die relative Dichte aufgestellte, sehr bequeme Formel anführen, die sehr bedeutend von allen übrigen abweicht, und die er aus seinen Untersuchungen über das Verhalten der Dämpfe von Alkohol, Chloroform, Schwefelkohlenstoff, Aether und Wasser ableitet.

Für alle diese Dämpfe soll nach seinen Untersuchungen die relative Dichte proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur anwachsen. In unserer Schreibweise lautet die von ihm aufgestellte Formel:

1) Fairbairn u. Tate, Phil. Mag. 21. (4). p. 231. 1861.

2) Clausius, Mech. Wärmetheorie I. 159.

3) Herwig, Pogg. Ann. 137. p. 19 u. 592. 1869.

$$\frac{d_s}{d_o} = 0,0595 \sqrt{T}. \quad (T = \text{absol. Temp.}),$$

und gilt diese Gleichung bis 100° . Da ferner die rechte Seite für $T < (273 + 9)^\circ$ kleiner als 1 wird (also auch $d_s < d_o$), so kann sie nur bis 9° abwärts gelten. Die Gleichung wäre wirklich recht bequem zur Berechnung von d_s , und hat auch Hr. Beyme in seiner Dissertation diese Formel angewandt, doch ist sie mir gerade ihrer so grossen Einfachheit wegen unwahrscheinlich.

Denn es ist doch jedenfalls sehr auffallend, dass die Natur des Dampfes ohne Einfluss auf d_s/d_o sein soll, und letzteres Verhältniss vielmehr nur eine Temperaturfunction darstellt. Auch sind die nach obiger Formel erhaltenen Zahlen meistens viel grösser, als die nach anderen Berechnungen erhaltenen. Es könnte dies vielleicht daher kommen, dass Hr. Herwig seine Versuche in zu kleinem Maassstabe ausgeführt hat, und das Volumen durch die Attraction der Wände zu klein ausgefallen ist. Hr. Herwig scheint von der Richtigkeit und Zuverlässigkeit seiner Beobachtungen aber ziemlich überzeugt zu sein, da er p. 610 ausspricht: „Der allgemein angenommene Werth für die Dichte des reinen gesättigten Wasserdampfes bei 100° , nämlich 0,645, scheint auf alle Fälle, selbst wenn man an der Relation $PV/p_1 v_1 = 0,0595 \sqrt{a + t}$ für Wasserdampf zwischen 40 und 95° Zweifel hegen sollte, zu klein gegriffen.“

Auch bezeichnet er die Methode von Fairbairn und Tate wegen ungenauer Temperaturbestimmung etc. als incorrect. Doch konnte ich mich von der Richtigkeit aller seiner Behauptungen nicht in dem Maasse überzeugen, dass ich mich für berechtigt gehalten hätte, jene so einfache Formel zur Berechnung von d_s anzuwenden. Anderenfalls wären hierdurch viele umständliche Berechnungen erspart geblieben.

In folgender Zusammenstellung habe ich die aus Herwig's Relation berechneten Werthe d_s/d_o mit den Zahlen verglichen, wie sie aus den früheren Betrachtungen abzuleiten sind, und kann man besonders bei einer graphischen Dar-

stellung erkennen, wie sehr der Charakter dieser Curve nach Herwig von allen übrigen abweicht.

Tabelle XI. d_s/d_o nach verschiedenen Berechnungsweisen.

| t° | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
|----------------------------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Herwig für alle Dämpfe | (0,9831) | 1,018 | 1,053 | 1,086 | 1,118 | 1,149 |
| Aus der Zustands- Aether | 1,011 | 1,023 | 1,041 | 1,068 | 1,107 | 1,163 |
| gleichung Alkohol | 1,001 | 1,002 | 1,006 | 1,012 | 1,023 | 1,042 |
| von Clausius Wasser | 1,000 | 1,000 | 1,001 | 1,003 | 1,007 | 1,013 |
| Wasserdampf nach Win- | | | | | | |
| kclmann | — | — | — | — | 1,020 | 1,029 |

Nach diesen Untersuchungen habe ich mich nun entschlossen, für Aether- und Alkoholdampf als das relativ sicherste die im Vorhergehenden entwickelte Methode der Berechnung auf Grund der Gleichung von Clausius anzuwenden, dagegen beim Wasserdampf, wie erwähnt, die von Winkelmann verbesserte Formel für die Verdampfungswärme in der Gleichung $s - \sigma = r/AT \cdot (\partial p / \partial T)$ zu benutzen.

Ueberhitzte Dämpfe.

Alle bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf gesättigten Dampf, und es ist nöthig, nun auch den überhitzten Zustand zu betrachten, für den die Bestimmung der Dichte fast noch unsicherer erscheint, als bei dem gesättigten Dampf. Die anfangs dieses Abschnitts erwähnte Berechnungsweise von Zeuner, die sich auf das Gesetz von Hirn stützt, ist wie dieses selbst nur angenähert richtig. Da ausserdem noch die Berechnung ziemlich umständlich ist, so habe ich auch hier die von Clausius gegebene Zustandsgleichung benutzt. Durch Kenntniss der Function ϑ kann man bis zum kritischen Punkt jede Isotherme nach der Gleichung (I_a) berechnen.

Wird mit Clausius zur Abkürzung gesetzt $\Theta = 8\theta/27\gamma$, so liefert die danach umgeformte Gleichung:

$$(I_b) \quad \frac{p}{RT} = \frac{1}{v - \alpha} - \frac{1}{\Theta(v + \beta)^2}$$

für v eine Curve dritten Grades. Doch kommt man für unsere Zwecke mit einer Gleichung zweiten Grades, in den meisten Fällen sogar mit einer linearen aus.

Es sei, wie früher, das spezifische Volumen des Dampfes (Volumen von 1 kg) im gesättigten, überhitzten und Gaszustand bezeichnet mit v_s , v und v_o . Dem analog die relativen Dichten mit d_s , d , d_o , und eine Grösse ε für dieselben drei Zustände mit ε_s , ε und ε_o . Die letztere soll definirt sein durch:

$$(VII) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_s = v_o(1 - \varepsilon_s) \text{ und } v = v_o(1 - \varepsilon), \\ \text{resp. } \frac{1}{d_s} = \frac{1}{d_o}(1 - \varepsilon_s) \quad \text{,,} \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{d_o}(1 - \varepsilon). \end{array} \right.$$

(Vergleiche hierzu Gleichung VI_a.)

Durch Kenntniss der Grössen ε_s und ε , die sich zwischen den Grenzen 0 und ungefähr $2/3$ bewegen¹⁾, ist auch das spezifische Volumen und die Dichte bekannt.

Da wir nach unserer Bezeichnung zu setzen haben:

$$(VIII) \quad \frac{p}{RT} = \frac{1}{v_o},$$

so lässt sich die Gleichung (I_b) auch so schreiben:

$$(I_c) \quad 1 = \frac{1}{1 - \varepsilon - \frac{\alpha}{v_o}} - \frac{1}{\Theta v_o \left(1 - \varepsilon + \frac{\beta}{v_o}\right)^2}.$$

Hierin sind α/v_o und β/v_o , wie auch ε , klein für nicht zu grosse Dichten.

Berücksichtigen wir nur die erste Potenz von ε , so erhalten wir, wenn wir diesen Werth ε' nennen:

$$(IX) \quad \varepsilon' = \frac{1}{v_o \Theta} \cdot \frac{1 - \alpha \Theta - \frac{2\beta}{v_o}}{1 - \frac{2}{\Theta v_o}}.$$

Dagegen mit Berücksichtigung der zweiten Potenz:

$$(IX_a) \quad \varepsilon = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{2}{\Theta v_o}}{1 - \frac{2}{\Theta v_o}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{2}{\Theta v_o}}{1 - \frac{2}{\Theta v_o}} \right) \sqrt{1 + 4 \left(\frac{1 - \frac{3}{\Theta v_o}}{1 - \frac{2}{\Theta v_o}} \right) \cdot \varepsilon'},$$

oder abgekürzt:

1) Siehe die Werthe d_s/d_o im kritischen Zustand bei Aether-, Wasser- und Alkoholdampf. p. 196 etc.

$$(IX_b) \quad \varepsilon = \varepsilon' \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon' \left(\frac{1 - \frac{3}{\Theta v_o}}{1 - \frac{2}{\Theta v_o}} \right) \right).$$

In den später zu berechnenden Fällen kann man fast immer $\varepsilon = \varepsilon'$ setzen.

Bezeichnen wir v_o und p für den Sättigungszustand des Dampfes mit v_o , und p_s , so ist zu setzen:

$$v_o = \frac{p}{p_s} \cdot v_{os},$$

worin dann p der wirklich vorhandene Druck, und p_s der Sättigungsdruck für die betreffende Temperatur ist.

Daher ist ε für kleine p/p_s — also starke Ueberhitzung — angenähert:

$$(IX_c) \quad \varepsilon = \varepsilon_s \frac{p}{p_s}$$

nach Gl. (IX), weil dann v_o sehr gross und ε an und für sich schon klein wird. Ebenso wäre für starke Ueberhitzung:

$$(IX_d) \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{d_o} \left(1 - \varepsilon_s \frac{p}{p_s} \right),$$

worin dann ε_s durch die früher berechneten Werthe d_s bekannt ist.

Formel für die Schallgeschwindigkeit der Dämpfe.

Man könnte sich versucht fühlen, die nach dem Vorigen berechnete Dichte d , resp. d_s in die Formel für die Schallgeschwindigkeit:

$$(X) \quad u = \sqrt{g \frac{R'T}{d_o} h}$$

einzuführen, indem man statt der constanten Grösse d_o die jedem Zustand entsprechende d setzt. Dies wäre nach dem Vorhergehenden gleichbedeutend mit einer Veränderung der Formel in:

$$(X_a) \quad u = \sqrt{g \frac{R'T}{d_o} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon}}.$$

Da die Formel (X) aber unter der Voraussetzung $pv = RT$ aus der allgemeineren:

$$(XI) \quad u = \sqrt{g \frac{\partial p}{\partial \varrho}}$$

abgeleitet ist, so wird man hierzu nicht berechtigt sein.¹⁾ Vielmehr werden wir suchen müssen, auch $\partial p / \partial \varrho$ aus einer der Wirklichkeit mehr sich nähernden Gleichung zwischen p und v abzuleiten. Als eine solche haben wir aber die von Clausius angegebene kennen gelernt.

Der Differentialquotient $\partial p / \partial \varrho$ gilt bei den Schallbewegungen für adiabatische Aenderungen und wird nach der von Clausius eingeführten Schreibweise bezeichnet mit $\partial_s p / \partial \varrho$, wobei der Index s die Constanz der Entropie ausdrücken soll; analog ist der für die isothermische Aenderung geltende Differentialquotient $\partial_{TP} p / \partial \varrho$.

Nach den allgemeinen, für jeden homogenen Körper geltenden Differentialgleichungen zwischen Wärmezufuhr, Druck und Volumen folgt bei Nullsetzung der ersteren:

$$(XII) \quad \frac{\partial_s p}{\partial \varrho} = k \frac{\partial_{TP} p}{\partial \varrho} \quad \text{oder auch} \quad \frac{\partial_s p}{\partial v} = k \frac{\partial_{TP} p}{\partial v}.$$

Für Gase ergibt sich hieraus wegen $p v = R T$ bekanntlich $\partial_{TP} p / \partial \varrho = p / \varrho = R T$; bei Dämpfen aber, bei denen die Isotherme keine gleichseitige Hyperbel ist, kann man aus der Zustandsgleichung (I_b) ebenfalls $\partial_{TP} p / \partial \varrho$ bilden, indem man in derselben T — somit auch Θ — constant setzt.

Man erhält dann, unter Beachtung, dass $v = 1 / \varrho$ ist:

$$(XIII) \quad \frac{\partial_{TP} p}{\partial \varrho} = R T \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{v}\right)^2} - \frac{2}{\Theta v \left(1 + \frac{\beta}{v}\right)^3} \right\},$$

und ferner die Schallgeschwindigkeit:

$$(XIV) \quad u = \sqrt{g \cdot \frac{R' T}{J_0} k \cdot \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{v}\right)^2} - \frac{2}{\Theta v \left(1 + \frac{\beta}{v}\right)^3} \right\}}.$$

Die zweite Wurzel steht also statt $\sqrt{1 - \varepsilon}$ in (X_a), und wir wollen diese Grösse den Reductionsfactor auf gleiche Dichte nennen, da er die durch die Dichte bewirkte Aenderung der Schallgeschwindigkeit fortschafft und nur noch den Einfluss von k übrig lässt. Er soll mit N bezeichnet werden.

1) Hr. Beyne hat in seiner öfter erwähnten Schrift seine Resultate auf diese Weise berechnet, indem er in (X) statt d_0 das aus Herwig's Relation abgeleitete d_s einführt.

Man kann dann denselben, da α/v und β/v kleine Grössen sind, auch schreiben:

$$(XV) \quad N = \sqrt{1 - \frac{2}{v} \left(\frac{1}{\Theta} - \alpha \right) + \left(\frac{6\beta}{\Theta v^2} \right)},$$

worin fast immer $6\beta/\Theta v^2$ zu vernachlässigen ist. Da $v = v_0(1 - \varepsilon)$ ist, haben wir dann:

$$(XV_a) \quad N = \sqrt{1 - \frac{2}{v_0(1 - \varepsilon)} \left(\frac{1}{\Theta} - \alpha \right)}.$$

Vergleicht man das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen mit dem früher (IX) für ε' aufgestellten Ausdruck, so findet man, dass, unter Vernachlässigung von $2\beta/v_0$, $2/\Theta v_0$ und ε gegen 1, dasselbe gleich $2\varepsilon'$ wird, oder angenähert auch gleich 2ε ; sodass wir N angenähert setzen können:

$$N = \sqrt{1 - 2\varepsilon}.$$

Nennen wir deshalb zur Abkürzung:

$$(XVI) \quad \eta = \frac{1}{v_0(1 - \varepsilon)} \left(\frac{1}{\Theta} - \alpha \right),$$

so ist N genauer:

$$(XV_b) \quad N = \sqrt{1 - 2\eta}$$

und also die Schallgeschwindigkeit, wenn wir $\sqrt{g(R'T)/d_0}$ mit u_0 bezeichnen:

$$(XIV_a) \quad u = u_0 \sqrt{1 - 2\eta}.$$

Die Rechnung hat ergeben, dass meistens η fast genau gleich ε ist, sodass wir mit ziemlich grosser Annäherung $N = \sqrt{1 - 2\varepsilon}$ setzen können und ebenso:

$$(XIV_b) \quad u = u_0 \sqrt{1 - 2\varepsilon},$$

während wir bei blosser Vertauschung von d mit d_0 in der Schallgeschwindigkeitsformel $u = u_0 \sqrt{1 - \varepsilon}$ hatten.

Dies einigermassen auffallende Ergebniss wird durch folgende allgemeine Betrachtung bestätigt.

Setzen wir in der Mariotte'schen Gleichung statt des für den Gaszustand geltenden Volumens v_0 dasjenige des Dampfes $v = v_0(1 - \varepsilon)$, so erhalten wir:

$$(XVII) \quad p v = R T (1 - \varepsilon)$$

statt der gewöhnlichen für Gase geltenden Formel. Es ist hierbei einerlei, durch welche Theorie oder empirische Formel ε gewonnen ist; dasselbe ist bekannt, wenn die Dichte des Dampfes ermittelt war.

Bei der Differentiation dieser Gleichung XVII nach v , resp. ϱ (bei constanter Temperatur) müssen wir aber beachten, dass auch ε von diesen Grössen abhängt.

Wir erhalten so ganz allgemein:

$$(XVII_a) \quad \frac{\partial_T p}{\partial \varrho} = RT \left(1 - \varepsilon + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right),$$

während wir für ein constantes ε bekommen:

$$(XVII_b) \quad \frac{\partial_T p}{\partial \varrho} = RT(1 - \varepsilon).$$

Nun ist aber ε so beschaffen, dass es bei immer grösser werdender Ueberhitzung — also wachsendem v — oder ebenso im Sättigungszustand bei abnehmender Temperatur selbst kleiner wird und sich schliesslich der Null nähert. Wir können daher annehmen: $\varepsilon = A/v$, wo A eine Constante ist.¹⁾

Wir erhalten dann:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = -\frac{\varepsilon}{v},$$

sodass unsere Gleichung XVII_a nun lautet:

$$(XVII_c) \quad \frac{\partial_T p}{\partial \varrho} = RT(1 - 2\varepsilon),$$

während man, wie gesagt, bei Annahme eines constanten ε die Gleichung (XVII_b) $\partial p / \partial \varrho = RT(1 - \varepsilon)$ erhält.

Das Verfahren der einfachen Substitution der Dichte des Dampfes in die Schallgeschwindigkeitsformel statt derjenigen im Gaszustand ist also entschieden unrichtig. Viel richtiger ist es schon, statt $\sqrt{1 - \varepsilon}$, wie es hierbei geschieht, $\sqrt{1 - 2\varepsilon}$ als Reductionsfactor anzuwenden.

Weiterhin erhalten wir bei Bezeichnung der für Luft geltenden Grössen mit gestrichelten Buchstaben:

1) Nach der Gleichung von Clausius ist angenähert $\varepsilon = 1/v\theta$ (vgl. IX).

$$(XVIII) \quad \frac{u}{u'} = \frac{k}{k'} = \sqrt{\frac{k}{k'} \cdot \frac{1}{d_0}} \cdot N = \sqrt{\frac{k}{k'} \cdot \frac{1}{d_0}} \cdot \sqrt{1 - 2\eta}.$$

Durch Division mit N fällt der Einfluss der veränderlichen Dichte auf u/u' heraus, und wenn wir dann $1/N \cdot u/u' = u_0/u'$ schreiben, so ist endlich:

$$(XIX) \quad k = k' \cdot d_0 \left(\frac{u_0}{u'} \right)^2 = k' \cdot d_0 \left(\frac{u}{u'} \right)^2 \cdot \frac{1}{N^2}.$$

Mit Hilfe der in diesem Abschnitt und in dem über die Dichte der Dämpfe entwickelten Gleichungen habe ich nun im Folgenden die Berechnung der vorliegenden Beobachtungen ausgeführt.

III. Berechnung der Beobachtungen.

Aetherdampf (Tab. I u. II).

Ausser meinen eigenen Versuchen habe ich noch die bereits angeführten, von Hrn. Beyme für gesättigten Dampf von 35° und von Masson für $35,5^\circ$ gefundenen Zahlen berechnet. Die für $20,5^\circ$ von Hrn. Beyme angegebene Schallgeschwindigkeit stimmt mit unserem Resultat bei derselben Temperatur so vollständig überein, dass eine gesonderte Berechnung derselben unnöthig ist.

Wie ich in meiner Dissertation ausführlicher nachgewiesen habe, liefern die nach den verschiedenen Formeln IX, IX_b und IX_c berechneten ϵ so übereinstimmende Werthe für die relative Dichte (nur bis circa $\frac{2}{10} \frac{0}{00}$ unterschieden), dass man bei den benutzten Temperaturen die Dichte des ungesättigten Dampfes nach der angenäherten Formel $1/d = 1/d_0(1 - \epsilon_s p/p_s)$ berechnen darf. Die Benutzung der Grösse ϵ statt η in der Formel (XV_b) für den Reductionsfactor N bringt dagegen eine Ungenauigkeit bis etwa $\frac{1}{2}$ Proc. mit sich, weshalb ich hier den genaueren Werth benutzt habe.

In der folgenden Tabelle ist t die Temperatur des Dampfes, p/p_s sein Sättigungsgrad, d seine relative Dichte, u/u' die relativen Schallgeschwindigkeiten, $(u/u') \cdot 1/N$ die auf gleiche Dichte reducirte Schallgeschwindigkeit und k das daraus berechnete Verhältniss der specifischen Wärmen. Dabei ist d_0 zu 2,5604 und k' (für Luft) zu 1,410 angenom-

men.¹⁾ Die mit (k_1) bezeichneten Werthe erhält man, wenn bei der Berechnung die Dichte des Dampfes in die gewöhnliche, für den Gaszustand geltende Formel eingesetzt wird. Wie man sieht, sind die aus unseren Versuchen berechneten Werthe von k für die verschiedenen Zustände des Dampfes fast ganz gleich, während die (k_1) noch über 1 Proc. Unterschiede zeigen.

Tabelle XII.

Aetherdampf, Werthe von u_0/u' und k .

| Nr. | t° | p/p_s | d | u/u' | $\left(\frac{u}{u'}\right)^{\frac{1}{N}}$ | k | (k_1) |
|--------|-----------|---------|--------|--------|---|-------|---------|
| 15 | 23 | 1 | 2,6240 | 0,5978 | 0,5514 | 1,097 | 1,070 |
| 26—31 | 20,4 | 1 | 2,6189 | 0,5991 | 0,5516 | 1,098 | 1,073 |
| 20—25 | 20 | 0,4261 | 2,5847 | 0,5460 | 0,5511 | 1,096 | 1,086 |
| Beyme | 35 | 1 | 2,6523 | 0,5309 | 0,5504 | 1,094 | 1,054 |
| Masson | 33,5 | 1 | 2,6523 | 0,5382 | 0,5579 | 1,124 | 1,083 |

Die für 35° nach Beyme's und Masson's Angaben berechneten k sind sehr voneinander verschieden, und dass dennoch in der Dissertation des ersteren das von ihm aus seinem Versuch abgeleitete k ²⁾ mit dem von Masson als Endresultat angegebenen übereinstimmt, liegt daran, dass letzterer zur Berechnung die für den Gaszustand geltende Dichte d_0 . Beyme hingegen die nach Herwig's Relation (vor. Abschn.) gefundene angewandt hat.

Wie man sieht, stimmt der aus Beyme's Versuch für 35° berechnete Werth k ebenfalls mit dem bei ca. 20° beinahe vollständig überein, während der nach Masson bedeutend grösser ist.

Die aus unseren Versuchen erhaltene Zahl für k ist das Mittel der drei ersten Grössen in voriger Tabelle.

| | | | |
|---------|---------------|------------|---------------|
| Nr. 15 | Gesättigt bei | 23° C. | $k = 1,097$, |
| „ 26—31 | „ | 20,4° C. | $k = 1,098$, |
| „ 20—25 | Ueberhitzt „ | 0°, 20° C. | $k = 1,097$ |

Mittel = 1,0973.

1) Dieser Werth für k' ist aus der Schallgeschwindigkeit in Luft = 332,5 m abgeleitet.

2) Beyme's Dissertation p. 39 Tabelle.

Somit wäre für Aetherdampf sowohl im gesättigten wie im überhitzten Zustand bei ungefähr 20° C.:

$$k = 1,097.$$

Ob dieser Werth auch noch bei 35° gilt, bleibt bei den widersprechenden Versuchen von Masson und Beyme noch dahingestellt.

Alkoholdampf.

Es möge zunächst eine Zusammenstellung für die Dichte des Dampfes bei zunehmender Abkühlung des Reservoirs folgen. In diesem Beispiel ist die Temperatur des Dampfes constant 50,9°; die beigefügten Temperaturen des Reservoirs verschaffen die Kenntniss des Druckes p , unter welchem der Dampf steht, während p_s den Druck im Sättigungszustand bei 50,9° C. bedeutet. Ausserdem ist noch der Sättigungsgrad p/p_s angegeben.

Tabelle XIII.

Relative Dichte des überhitzten Alkoholdampfes
in verschiedenen Sättigungsgraden.

Temperatur des Baßes = 50,9° C.

| Res. Temp. | p | p/p_s | d | s | |
|---------------|-----------|---------|--------|---------|-----------------------------|
| 50,9° | 229,52 mm | 1 | 1,6504 | 0,00808 | Sättigung |
| 37 | 114,30 | 0,4980 | 1,5988 | 402 | Ueber- hitzer Zustand |
| 30 | 78,52 | 0,3422 | 1,5968 | 276 | |
| 20 | 44,46 | 0,1937 | 1,5949 | 157 | |
| 10 | 32,98 | 0,1437 | 1,5942 | 116 | |
| 0 | 12,70 | 0,0553 | 1,5931 | 045 | |
| -10 | 6,47 | 0,0282 | 1,5928 | 023 | Gaszustand |
| -20 | 3,34 | 0,0145 | 1,5926 | 012 | |
| — | — | — | 1,5924 | 0 | |

Wie man sieht, ist bei 37 und 20° der Gaszustand beinahe schon erreicht (Versuche Nr. 104 und 105); doch ist die Berechnung für die genaue Dichte durchgeführt.

Aus den Versuchen Nr. 106—110 mit gesättigtem Alkoholdampf können wir noch vor der Berechnung das Mittel nehmen, da die Temperatur bei diesen fast gleich ist.

Tab. XIV. Gesättigter Alkoholdampf bei 50,7° C.

| Nr. | Temp. | u/u' | Δ |
|--------|-------|---------------------|------------------|
| 106 | 50,9° | 0,7078 | +04 ₅ |
| 107 | 51,4° | 0,7087 | +13 ₅ |
| 109 | 49,9° | 0,7062 | -11 ₅ |
| 110 | 50,6° | 0,7067 | -06 ₅ |
| Mittel | 50,7° | 0,7073 ₅ | ±11,2 |

Wahrscheinlicher Fehler des Mittels 0,05 Proc., einer Beobachtung = 1°/100.

Die folgende Tabelle gibt die Resultate der Rechnung für die früher mitgetheilten Versuche. Die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe wie in Tab. XII.

Tabelle XV. Alkoholdampf. Werthe von u/u' und k .

| Nr. | t° | p/p_s | d_s | d | u/u' | $\frac{u}{u'} \cdot \frac{1}{N}$ | k | (k_1) |
|---------|-----------|---------|--------|-----------------|--------|----------------------------------|-------|---------|
| 77 | 47,7 | 0,6833 | 1,6038 | 1,6002 | 0,7062 | 0,7097 | | |
| 78 | 48,5 | 0,8464 | 1,6042 | 1,6024 | 0,7078 | 0,7122 | | |
| 79 | 48,6 | 0,9664 | 1,6043 | 1,6039 | 0,7032 | 0,7083 | | |
| | | | | Mittel | 0,7101 | | 1,132 | 1,125 |
| 104 | 51,0 | 0,2070 | 1,6055 | 1,5951 | 0,7138 | 0,7150 | | |
| 105 | 50,9 | 0,4980 | 1,6054 | 1,5988 | 0,7126 | 0,7155 | | |
| | | | | Mittel | 0,7152 | | 1,148 | 1,144 |
| 106—110 | 50,9 | 1 | 1,6054 | 1,6054 | 0,7074 | 0,7132 | 1,142 | 1,132 |
| 102 | 63,2 | 0,9567 | 1,6131 | 1,6124 | 0,7023 | 0,7111 | | |
| 103 | 64,0 | 0,9869 | 1,6137 | 1,6136 | 0,6931 | 0,7023 | | |
| | | | | Mittel | 0,7067 | | 1,121 | 1,106 |
| Masson | 78,5 | 1 | 1,6282 | 1,6282 | 0,6925 | 0,7090 | 1,125 | 1,101 |
| | | | | Mittelwerth . . | | | 1,133 | |

Zunächst erkennt man aus dieser Tabelle jedenfalls, dass die nach Formel (XIX) p. 208 berechneten Werthe k (vorletzte Spalte) viel weniger weit auseinander gehen, als die durch Einsetzen der Dichte in die gewöhnliche Schallgeschwindigkeitsformel erhaltenen (k_1) ; die noch übrig bleibenden Abweichungen können zum Theil in der Natur des Dampfes begründet sein, zum grösseren Theil rühren sie aber wohl von der mangelhaft bekannten Dichte des Alkoholdampfes her.

Man kann daher aus diesen Beobachtungen vorläufig keinen weiteren Schluss auf die Veränderlichkeit von k mit dem Zustand des Dampfes ziehen, sondern man erhält nur

einen Mittelwerth $k = 1,13$, der in den Grenzen der Beobachtungen gültig ist.

Dasselbe gilt auch für den Wasserdampf, für den die Ergebnisse der Berechnung im Folgenden zusammengestellt sind. Hierbei konnte nach den Erörterungen beim Aetherdampf ϵ als $\epsilon, p/p_s$ berechnet werden. Die Dichte d_0 ist zu 0,6231 angenommen, k' wie früher zu 1,410.

Tabelle XVI. Wasserdampf. Werthe von u_0/u' und k .

| Nr. | t | p/p_s | d_s | d | u/u' | $\left(\frac{u}{u'}\right) \frac{1}{N}$ | k |
|--------|------|---------|--------|---------|--------|---|-------|
| 124 | 92,3 | 0,5275 | 0,6386 | 0,6312 | 1,196 | 1,212 | 1,299 |
| 125 | 93,9 | 0,5809 | 0,6391 | 0,6323 | 1,193 | 1,211 | |
| 163 | 96,9 | 0,6995 | 0,6399 | 0,6348 | 1,212 | 1,235 | |
| Masson | 95 | 1 ? | 0,6395 | 0,6395? | 1,204 | 1,235 | 1,340 |

Mittel . . 1,33

Bei der grossen Schwierigkeit dieser Versuche, überhaupt Stauffiguren zu erhalten, und der häufig eintretenden Undichtigkeit des Apparates sind diese Zahlen nur als vorläufige zu betrachten.

Ebenso bleibt es vorbehalten, eine systematische Untersuchung dieser Dämpfe vorzunehmen, geordnet nach Temperatur und Sättigungsgrad derselben, um so Curven für die Werthe von k zu erhalten.

Es würde sich zunächst empfehlen, diese Untersuchung mit Aetherdampf vorzunehmen, da hier die Versuche am leichtesten gelingen, und auch die Grenzen, innerhalb deren dieselben können vorgenommen werden, viel weitere sind, als bei den anderen Dämpfen; man wird dann auch von diesem Dampf auf das Verhalten der übrigen schliessen dürfen.

In diesem Sinne hoffe ich, die Arbeit demnächst weiter führen zu können, doch wird es dazu nöthig sein, auch die Dichte der Dämpfe in den verschiedenen Zuständen experimentell zu bestimmen.

Die für die drei untersuchten Dämpfe gefundenen Mittelwerthe für das Verhältniss der specifischen Wärmen sind also nach dem Vorhergehenden für:

| | | | |
|---|-------------------|-----------|-------------|
| { | Aetherdampf (20°) | | $k = 1,097$ |
| | Alkoholdampf | | $k = 1,133$ |
| | Wasserdampf | | $k = 1,33.$ |

Die nach anderen Methoden ermittelten Werthe von k sind sehr verschieden angegeben. So ist z. B. für Aetherdampf nach E. Wiedemann¹⁾ $k = 1,078$, nach Müller²⁾ 1,029.

Doch will ich auf diese Bestimmungen hier nicht näher eingehen.

Zum Schlusse meiner Arbeit sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrath Prof. v. Helmholtz, für seine vielseitige Unterstützung durch Rath und That im Verlaufe dieser Arbeit, sowie für sein reges Interesse an derselben meinen ehrerbietigen Dank auszusprechen.

Tabelle für $Z = (H/H_c)(W/W_c)$.

Tabelle XVII zu p. 196.

| ϑ | Z | A | ϑ | Z | A | ϑ | Z | A | ϑ | Z | A |
|-------------|--------|-----|-------------|--------|-----|-------------|--------|-----|-------------|--------|------|
| 0,20 | 4,0000 | 1 | 0,40 | 3,9449 | | 0,60 | 3,5607 | | 0,80 | 2,7596 | |
| 0,21 | 3,9999 | 1 | 0,41 | 3,9355 | 93 | 0,61 | 3,5303 | 304 | 0,81 | 2,7079 | 517 |
| 0,22 | 3,9998 | 1 | 0,42 | 3,9252 | 103 | 0,62 | 3,4990 | 313 | 0,82 | 2,6550 | 529 |
| 0,23 | 3,9997 | 1 | 0,43 | 3,9138 | 114 | 0,63 | 3,4666 | 324 | 0,83 | 2,6008 | 542 |
| 0,24 | 3,9994 | 3 | 0,44 | 3,9015 | 123 | 0,64 | 3,4333 | 333 | 0,84 | 2,5450 | 558 |
| 0,25 | 3,9991 | 3 | | | 133 | | | 344 | | | 573 |
| 0,26 | 3,9986 | 5 | 0,45 | 3,8882 | 144 | 0,65 | 3,3989 | 353 | 0,85 | 2,4877 | 589 |
| 0,27 | 3,9979 | 7 | 0,46 | 3,8738 | 155 | 0,66 | 3,3636 | 364 | 0,86 | 2,4288 | 607 |
| 0,28 | 3,9969 | 10 | 0,47 | 3,8583 | 165 | 0,67 | 3,3272 | 373 | 0,87 | 2,3681 | 627 |
| 0,29 | 3,9956 | 13 | 0,48 | 3,8418 | 175 | 0,68 | 3,2899 | 384 | 0,88 | 2,3054 | 648 |
| | | | 0,49 | 3,8243 | 186 | 0,69 | 3,2515 | 394 | 0,89 | 2,2406 | 673 |
| 0,30 | 3,9940 | 16 | 0,50 | 3,8057 | 197 | 0,70 | 3,2121 | 404 | 0,90 | 2,1738 | 698 |
| 0,31 | 3,9920 | 20 | 0,51 | 3,7860 | 208 | 0,71 | 3,1717 | 415 | 0,91 | 2,1035 | 731 |
| 0,32 | 3,9894 | 26 | 0,52 | 3,7652 | 219 | 0,72 | 3,1303 | 425 | 0,92 | 2,0304 | 765 |
| 0,33 | 3,9863 | 31 | 0,53 | 3,7433 | 229 | 0,73 | 3,0878 | 435 | 0,93 | 1,9539 | 809 |
| 0,34 | 3,9827 | 36 | 0,54 | 3,7204 | 240 | 0,74 | 3,0443 | 447 | 0,94 | 1,8730 | 864 |
| 0,35 | 3,9783 | 44 | 0,55 | 3,6964 | 250 | 0,75 | 2,9996 | 457 | 0,95 | 1,7866 | 935 |
| 0,36 | 3,9732 | 51 | 0,56 | 3,6714 | 261 | 0,76 | 2,9539 | 469 | 0,96 | 1,6931 | 1036 |
| 0,37 | 3,9674 | 58 | 0,57 | 3,6453 | 271 | 0,77 | 2,9070 | 479 | 0,97 | 1,5895 | 1178 |
| 0,38 | 3,9608 | 66 | 0,58 | 3,6182 | 283 | 0,78 | 2,8591 | 491 | 0,98 | 1,4708 | 1487 |
| 0,39 | 3,9533 | 75 | 0,59 | 3,5899 | 292 | 0,79 | 2,8100 | 504 | 0,99 | 1,3221 | 3221 |
| 0,40 | 3,9449 | 84 | 0,60 | 3,5607 | | 0,80 | 2,7596 | | 1,00 | 1,0000 | |

Berlin, Physikal. Inst., Juni 1887.

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 2. p. 215. 1877.

2) Müller, Wied. Ann. 18. p. 94. 1883.

IX. Ueber den Beginn der Lichtemission glühender Metalle; von R. Emden.

(Hierzu Taf. II Fig. 9.)

Die Ansichten, welche man, gestützt auf eine Arbeit von Draper¹⁾, über den Beginn der Lichtentwicklung glühender Körper hegte, mussten sich infolge der Untersuchungen der Herren Prof. Dr. H. F. Weber²⁾ und Dr. Stenger³⁾ vollständig ändern. Der Grund dafür, dass sich die Resultate der Arbeit von Draper so fest einbürgern konnten, ohne dass die Versuche wiederholt wurden, ist wohl darin zu suchen, dass sie sich den Anschauungen über Molecular- und Aetherbewegung gut anzupassen schienen. Die neuerlangten Resultate gestatten keine Schlüsse in dieser Richtung, denn sie beweisen vor allem, dass wir aus dem Gange der beginnenden Lichtentwicklung weder schliessen können auf das erste Auftreten einer Aetherschwingung von bestimmter Wellenlänge, noch auf die Vertheilung der Energie im Emissionsspectrum, da man als Reagens für die auftretenden Lichtstrahlen das Auge benutzt, das erst beeinflusst wird, nachdem die Energie einer bestimmten Strahlengattung einen gewissen Schwellenwerth überschritten hat, der nach Untersuchungen von Ebert⁴⁾ für Strahlen verschiedener Wellenlänge sehr verschieden ist.

Nach Draper beginnen alle festen Körper in dem Augenblicke Licht auszusenden, wo sie die Temperatur von 525° erreichen. Es hat aber Hr. Prof. Weber gezeigt, dass die Metalle schon bei einer Temperatur von ca. 400° (also etwa 30% niedriger) auf unser Auge wirken, und dass schon bei diesen sich optisch so ähnlich verhaltenden Körpern diese Temperatur verschieden hoch liegt.

Nach Draper erscheint ein Körper, der eben zu glühen beginnt, dunkelroth, und sein Emissionsspectrum reicht von der Linie *B* bis zur Linie *b*, um sich bei steigender

1) Draper, Phil. Mag. 30. 345. 1847.

2) Weber, Berl. Ber. 28. p. 491. 1887; Wied. Ann. 32. p. 256. 1887.

3) Stenger, Wied. Ann. 32. p. 271. 1887.

4) Ebert, Wied. Ann. 33. p. 136. 1888.

Temperatur in wesentlich einseitiger Richtung zu entwickeln, sodass der glühende Körper allmählich alle die Farben zeigt, wie man sie noch in allen Lehrbüchern der Physik und Spectralanalyse beschrieben findet. Die neueren Untersuchungen zeigen aber, dass diese Erscheinung bei exacter Beobachtung ganz anders verläuft. Das Glühen der Körper beginnt mit der Aussendung eines eigenthümlichen Lichts, dessen Charakter nach Farbe und Helligkeit von Hrn. Prof. Weber sehr treffend durch „gespenstergraues“ oder „düsternebelgraues“ Licht bezeichnet wird. Bei steigender Temperatur wird dies erste, düsterste Grau immer heller, wird hellgrau, dann leicht gelblichgrau, bis die eigentliche Rothgluth, beginnend mit dem lichtesten Feuerroth, eintritt. Die weitere Farbenfolge ist hellroth, orange, gelb und weiss. Das erste Grau erweist sich als Licht von der Wellenlänge der grüngelben Strahlen des Spectrums. Das Spectrum der eben zu glühen beginnenden Körper besteht aus einem grauen Streifen an der Stelle, wo bei steigender Temperatur die grüngelben Strahlen zum Vorschein kommen; und mit steigender Temperatur entwickelt sich das Spectrum nach beiden Seiten. Das Auftreten dieses düstersten Graues, durch welches bei steigender Temperatur eines Körpers unser Auge zuerst beeinflusst wird, muss deshalb als der Beginn der Lichtentwicklung, des Glühens eines heissen Körpers bezeichnet werden. Ich bin Hrn. Prof. Weber sehr dankbar dafür, dass er mich veranlasste, die Temperatur der eben eintretenden Graugluth für eine Reihe von Metallen mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, da die Kenntniss dieser Daten für eine Theorie der Strahlung von Wichtigkeit sein kann.

Ich benutzte den sehr zweckmässigen, schon von Hrn. Prof. Weber angewandten und wie folgt beschriebenen Apparat:

Ueber die Flamme eines Bunsenbrenners wird ein Trichter aus Kupferblech gestülpt, dessen obere, etwa 4 cm weite Oeffnung mit einer in einen Messingring gespannten dünnen Lamelle aus Platin, Gold u. s. w. verschlossen ist. Kurz unter der aufgesetzten Lamelle trägt der Trichter ein seitlich angesetztes, senkrecht zur Trichteraxe verlaufendes Rohr, das die

Verbrennungsgase nach aussen zu führen hat. Der Trichter wird so gestellt, dass die Flamme des Brenners in der Axe des Trichters aufsteigt; seine Höhe ist so bemessen, dass sein Mantel das schwache Licht des Brenners vollständig nach aussen absperrt. Auf diesen ersten Trichter ist ein zweiter, gleich grosser, inwendig geschwärzter Trichter aus Kupferblech in umgekehrter Stellung so aufgesetzt, dass die Axen der beiden Trichter in dieselbe Gerade fallen und die Lamelle aus Platin, Gold u. s. w. den Bodenverschluss des oberen Trichters bildet. Beugt sich das Gesicht des Beobachters in die Oeffnung des oberen Trichters, so sieht es, solange die Lamelle nicht glüht, im Dunkelmzimmer und bei Nacht ein absolut dunkles Gesichtsfeld vor sich. Wird durch langsame Regulirung des Gas- und Luftzuflusses zum Brenner die Lamellentemperatur allmählich gesteigert, so tritt ein Moment ein, wo das in die Tiefe des Trichters blickende Auge in der Mitte der Lamelle einen kleinen kreisförmig begrenzten Lichtfleck gewahrt, der ein äusserst schwaches, düsternebelgraues oder fahlaschgraues Licht aussendet, das in der Mitte des Fleckes etwas heller leuchtet, als in der Nähe des verwachsenen Randes. Dieser düsternebelgraue Fleck auf schwarzem Untergrunde macht dem Beobachter vollständig den Eindruck eines äusserst schwach leuchtenden Nebelfleckes auf dunkelstem Nachthimmel. Meist erscheint diese erste Spur von Licht etwas hin und her bewegt und bald aus der Lamelle hervorbrechend, bald im Dunkel des Gesichtsfeldes verschwindend, eine Erscheinung, die offenbar durch die kleinen unvermeidlichen örtlichen und zeitlichen Schwankungen der Temperatur der Lamellenmitte bedingt ist. Die Metalle wurden in dünnen Lamellen von ungefähr 0,05 bis 0,1 mm Dicke angewandt.

Die Temperaturen dieser Lamellen wurden mittelst Thermoelementen gemessen, die bei sorgfältiger Handhabung ein ebenso bequemes, als genaues Messinstrument sind. Die Temperaturen, die hier zu messen waren, lagen bei ungefähr 400°, und es war deshalb, wollte man eine Genauigkeit von ca. 1% erlangen, aus gleich anzuführenden Gründen eine längere Voruntersuchung über Thermoelemente nöthig.

Es ist bekannt, dass man a priori weder über electromotorische Kraft eines Thermoelements, noch über ihren Verlauf mit der Temperatur etwas bestimmtes aussagen kann; die Constanten eines jeden Elements müssen empirisch durch Calibrirung gefunden werden. Hat man es mit der Bestimmung nur niederer Temperaturen zu thun, bis zu welchen, oder über welche hinaus man noch calibriren kann, so stehen ihrer Messung keine weiteren Schwierigkeiten im Wege. Bis zu Temperaturen von etwa 250° können mit Hülfe von heissen Leinölbädern und Quecksilberthermometern, die vorher mit dem Luftthermometer verglichen wurden, Thermoelemente verhältnissmässig einfach auf ihren Gang geprüft werden. Noch höhere Temperaturen zu diesem Zwecke mit genügender Genauigkeit herzustellen, ist aber schon sehr schwierig, und hat man es, wie es hier der Fall war, mit Temperaturen in der Nähe von 400° zu thun, so ist man wohl oder übel auf eine Extrapolation angewiesen. Soll eine solche aber mit genügender Sicherheit ausgeführt werden, so wird man sich möglichst genaue Kenntniss von dem Verlaufe der electromotorischen Kraft der Thermoelemente im allgemeinen verschaffen müssen. Eine ganze Reihe von Arbeiten, hauptsächlich diejenigen von Avenarius, Gaugain¹⁾, Draper und Tait haben gezeigt, dass die Curven, welche die electromotorische Kraft der Elemente als Function der Temperatur darstellen, Parabeln sind, und Theorien von Clausius und Thomson sind hiermit in Uebereinstimmung. Es sind ferner im hiesigen Laboratorium früher zahlreiche Versuche angestellt worden an Elementen, bei denen diese Curve möglichst stark gekrümmt war, der Wendepunkt also bei verhältnissmässig niederen Temperaturen liegt; und es hatte sich auch hier herausgestellt, dass sowohl der aufsteigende wie der absteigende Ast der Curve sich analytisch durch die nämliche Parabelgleichung ausdrücken liessen. Stellen wir allgemein die Abhängigkeit der thermoelectrischen Kraft

1) Gaugain hat diese Curven als Hyperbeln mit verticaler Axe dargestellt; sie lassen sich jedoch ebenso genau durch die Parabelgleichung ausdrücken.

von der Temperatur durch eine Gleichung dar, von der Form:

$$E = at + bt^2 + ct^3 + dt^4 + \dots,$$

so wird es dadurch äusserst wahrscheinlich, dass nicht nur in dem Beobachtungsintervall, sondern darüber hinaus die Glieder mit den Constanten c und $d \dots$ nur verschwindend kleinen oder überhaupt keinen Einfluss haben werden. Um aber bei dieser Extrapolation möglichst sicher zu gehen, stellte ich mir die Aufgabe, aus den mir zur Verfügung stehenden Drahtsorten diejenige Combination auszusuchen, bei welcher die Constante b den kleinsten Werth hat, von der Ueberlegung ausgehend, dass die jedenfalls für das Beobachtungsintervall von 0° bis 250° sich nicht bemerkbar machenden Constanten c , d u. s. w. auch später, wenn sie, was nicht wahrscheinlich, überhaupt vorhanden, um so weniger zur Geltung kommen würden, je kleiner b ist. Es hat nun bereits Becquerel¹⁾ gezeigt, dass bei der Metallcombination Platin-Palladium die thermoelectrische Kraft der Temperatur bis 350° direct proportional ist, was nach Draper²⁾ für Eisen-Palladium bis 280° der Fall ist. Allein die verschiedene Stellung, welche bei verschiedenen Beobachtern die Metalle in der thermoelectrischen Reihe einnehmen, ebenso die ganz verschiedenen Zahlenwerthe, die für ihre thermoelectrischen Eigenschaften angegeben werden, zeigen allein schon zur Genüge, dass das ganze thermoelectrische Verhalten eines Metalles in höchstem Grade durch Spuren fremder Beimengungen oder Verschiedenheit der Structur beeinflusst wird, wie dies in Bezug auf Electricitäts- und Wärmeleitungsvermögen der Fall ist. Ich werde weiter unten zeigen, wie sehr selbst in ein und demselben Stücke Metall die thermoelectrischen Eigenschaften von Stelle zu Stelle wechseln. Man kann sich deshalb nie auf die Angaben anderer Beobachter stützen, die mit anderen Metallsorten arbeiteten, sondern wird jedesmal die Metalle, die einem zur Verfügung stehen, speciell untersuchen müssen. Meine Untersuchung dehnte sich aus auf eine Reihe von Thermo-

1) Becquerel, Ann. de chim. et de phys. (4) 8. p. 426. 1866.

2) Draper, Phil. Mag. 16. p. 451. 1840.

elementen, wobei die Metalle Kupfer, Neusilber, Platin, Palladium, Messing, hartes Eisen, weiches Eisen und Stahl zur Verwendung kamen. Hierbei zeigte es sich, dass die Metallcombination Platin-Palladium meinen Anforderungen nicht entsprachen. In sehr hohem Grade war dies jedoch bei den Thermoelementen aus Eisen-Neusilber der Fall, besonders bei Anwendung von hartem Eisen. Sowohl weiches Eisen wie Stahl erwiesen sich weniger vortheilhaft. Während die electromotorische Kraft als Function der Temperatur ausgedrückt wurde durch, bei:

| | |
|-------------------------|--|
| Kupfer-Eisen (hart) | $E = \text{prop. } (t - 0,00230 t^2)$ |
| Palladium-Eisen (weich) | $E = \text{prop. } (t - 0,00115 t^2)$ |
| Palladium-Platin | $E = \text{prop. } (t - 0,00163 t^2)$ |
| Kupfer-Neusilber | $E = \text{prop. } (t + 0,00146 t^2)$ |
| Eisen-Messing | $E = \text{prop. } (t + 0,00190 t^2)$ |
| Palladium-Messing | $E = \text{prop. } (t - 0,00292 t^2)$ |
| Neusilber-Stahl | $E = \text{prop. } (t + 0,00043 t^2)$ |
| Neusilber-Eisen (weich) | $E = \text{prop. } (t + 0,000199 t^2)$ |

ergab sich für das ungünstigste der später benutzten Elemente Neusilber-Eisen (hart) (später als Thermoelement Nr. 7 bezeichnet):

$$E = \text{prop. } (t - 0,000171 t^2).$$

Bei diesem Elemente betrug die von dem Gliede bt^2 herführende Veränderung des Galvanometerausschlages bei einer Temperatur von 250° , bis zu welcher stets calibrirt wurde, nur 10,2, bei der Extrapolation auf 400° nur 27,4 Scalentheile, wenn das Galvanometer so gestellt war, dass einem Grad Temperaturdifferenz der Löthstellen ein Scalentheil Ausschlag entsprach. Würde der Verlauf der electromotorischen Kraft dieses Elementes in Wirklichkeit nicht streng durch diese parabolische Gleichung, sondern durch die vollständigere Potenzreihe ausgedrückt werden, so würden die Glieder ct^3 u. s. w., die bei der Calibrirung bis 250° sich nicht bemerkbar machten, auch bei 400° nur einen verschwindend kleinen Einfluss ausüben, ausgenommen die thermoelectrischen Constanten dieser Combination würden sich zwischen 250 und 400° vollständig ändern. Zu den vorkommenden Temperaturmessungen wurden deshalb diese

Elemente aus hartem Eisen-Neusilber benutzt. Ehe ich mich jedoch hierfür definitiv entschied, mussten dieselben noch nach anderer Richtung hin untersucht werden.

Die Quecksilberthermometer zeigen bekanntlich nach ihrer Erwärmung auf höhere Temperaturen öfter beträchtliche thermische Nachwirkungen. Es fragte sich, ob solche auch bei diesen Thermoelementen auftreten würden, was sich a priori nicht entscheiden liess.¹⁾ Die Untersuchung ergab ein negatives Resultat. Ein Thermoelement, Eisen-Neusilber, gab bei $13,88^{\circ}$ einen Ausschlag von 58,15 Scalentheilen; das Verhältniss beider ist 4,190. Unmittelbar nachdem die eine Löthstelle des Thermoelementes längere Zeit in den Dampf siedenden Wassers gehängt wurde, ergab sich bei $14,24^{\circ}$ Temperaturdifferenz ein Ausschlag von 59,7 Scalentheilen: Verhältniss unverändert 4,192. Bei einem zweiten Thermoelemente war dies Verhältniss bei $13,15^{\circ}$ gleich 2,161, und nachdem die eine Löthstelle desselben längere Zeit in einem Leinölbade einer Temperatur von 200° ausgesetzt war, bei $13,46^{\circ}$ wiederum 2,162. Ein drittes Thermoelement, das bei $14,37^{\circ}$ Temperaturdifferenz einen Ausschlag von 33,3 Scalentheilen (Verhältniss beider 2,314) bewirkte, veranlasste, nachdem seine eine Löthstelle längere Zeit auf Rothgluth erhalten wurde, bei $14,42^{\circ}$ Temperaturdifferenz einen Ausschlag von 33,4 Scalentheilen; Verhältniss wiederum 2,316. Eine thermische Nachwirkung konnte also nicht constatirt werden.

Sehr vortheilhaft war es ferner, dass sich bei eingehender Untersuchung die beiden Löthstellen als vollständig gleichwerthig erwiesen. Die thermoelectrische Kraft des Elementes hing nur ab von der Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen, gleichgültig welche von beiden sich auf der höheren Temperatur befand. Dies hatte die Annehmlichkeit, dass an jeder der beiden Löthstellen eines Elementes eine zu untersuchende Metallplatte angebracht werden konnte, ein geaichtes Thermoelement also für zwei Metallplatten ausreichte.

1) Hr. Prof. Weber konnte (l. c.) bei dem vorher benutzten Thermoelemente Kupfer-Neusilber solche Aenderungen constatiren.

Sehr unangenehm erwies sich aber der Umstand, dass das thermoelectrische Verhalten eines Metalles in höchstem Maasse durch Spuren fremder Beimengungen und Aenderungen der Structur beeinflusst wird. Schon in ein und demselben Stücke Draht ändern sich die thermoelectrischen Constanten von Stelle zu Stelle. An einem geachteten Elemente Kupfer-Neusilber wurde eine Löthstelle gelöst, die Drähte jeder um ein Centimeter verkürzt, wieder gelöthet, das Element wiederum calibrirt und dann diese ganze Operation wiederholt. In diesen drei Fällen zeigte die electromotorische Kraft folgenden verschiedenen Verlauf:

- 1) $E = \text{prop. } (t + 0,00195 t^2)$
- 2) $E = \text{prop. } (t + 0,00146 t^2)$
- 3) $E = \text{prop. } (t + 0,00184 t^2)$.

Das gleiche war bei den Elementen Eisen-Neusilber der Fall. Dadurch konnten die thermoelectrischen Constanten einer bestimmten Drahtsorte nicht ein- für allemal bestimmt werden, sondern man war gezwungen, ein jedes Thermoelement einzeln zu calibriren, selbst dann, wenn nur eine Löthstelle gebrochen und dann frisch gelöthet worden war. Wie nothwendig dies war, zeigte folgende kleine Tabelle. Ich gebe in derselben den Zusammenhang zwischen dem reducirten Scalenausschlag des Galvanometers (bei grösstem äusseren Widerstande das Maass der electromotorischen Kraft) und der Temperatur bei den elf Thermoelementen Eisen-Neusilber, mit denen die definitiven Messungen an 22 Metallplatten gemacht wurden.

| | |
|--|---|
| Nr. 1. $A = 0,93986 t + 0,0_3 129 t^2$, | Nr. 7. $A = 1,0757 t - 0,0_3 185 t^2$, |
| " 2. $= 0,99354 t + 0,0_3 55 t^2$, | " 8. $= 1,0725 t - 0,0_3 179 t^2$, |
| " 3. $= 0,99021 t + 0,0_3 52 t^2$, | " 9. $= 1,0424 t - 0,0_3 172 t^2$ *, |
| " 4. $= 1,0502 t + 0,0_3 124 t^2$ *, | " 10. $= 1,0399 t - 0,0_3 105 t^2$, |
| " 5. $= 1,0425 t - 0,0_3 103 t^2$, | " 11. $= 1,0709 t - 0,0_3 145 t^2$ *, |
| " 6. $= 1,0458 t - 0,0_3 100 t^2$, | |

(* bedeutet, dass kleine Veränderungen am Galvanometer vorgenommen wurden.)

Der angewandte Neusilberdraht hatte einen Durchmesser von 0,1 mm, der Eisendraht von 0,2 mm. In die durchschnittlich 0,05 bis 0,1 mm dicke zu untersuchende Metalllamelle wurde in die Mitte mit einer feinen Nadel ein kleines Loch

gebohrt, die beiden Drähte in dasselbe mit Silber, wo dies nicht anging, mit Silberloth eingelöthet und sorgfältig darauf geachtet, dass die ganze Löthstelle nur ein Volumelement der Platte ausmachte. Die beiden Enden der Neusilberdrähte waren an die dicken Kupferdrähte der Galvanometerleitung angelöthet; die Löthstellen, in dünnen Kautschukröhrchen steckend, waren gemeinsam mit Watte umwickelt und so beide auf möglichst gleicher Temperatur erhalten. Eine electromotorische Kraft, von diesen Löthstellen herrührend, machte sich nicht bemerkbar. Die Calibrirung der Elemente geschah in der Weise, dass ein Zusammenhang gesucht wurde zwischen dem reducirten Scalenausschlag des Galvanometers und der Temperaturdifferenz der Löthstellen, natürlich bei den gleichen Verhältnissen der Leitung und des Galvanometers, wie sie bei der Verwendung der Thermoelemente vorhanden waren. Die eine Löthstelle des Elementes befand sich stets in Eis, die andere wurde auf fünf verschiedene Temperaturen, von 40, 100, 150, 200 und 250° erwärmt. Die niedrigste Temperatur wurde in einem grossen Wasserbade hergestellt und mittelst eines Thermometers von Tonnellot in Paris gemessen, bei 100° hing die Löthstelle in dem Dampfe des bei bekanntem Barometerstande siedenden Wassers oder befand sich in dem 7—8 l haltenden Leinölbade, das zur Erzeugung der höheren Temperaturen von 150 bis 250° diente, zu deren Messung zwei Thermometer von Gerhardt benutzt wurden. Die Löthstelle war unmittelbar an die Kugel des Quecksilberthermometers festgebunden, und um Thermoelement und Thermometer möglichst synchron gehen zu lassen, wurden Thermometer mit möglichst kleinen Quecksilbergefässen ausgewählt. Bei einiger Uebung konnte durch passende Regulirung der Brenner und tüchtiges Rühren selbst die Temperatur von 250° während einer Viertelstunde auf 0,5 bis 0,75° constant erhalten werden. Die Thermometer wurden nicht calibrirt, sondern sie wurden gerade bei den Temperaturen, bei denen sie gebraucht wurden (also bei 40, resp. 150, 200 und 250°) direct mit einem von Fuess in Berlin gefertigten Luftthermometer verglichen. Bei dem Thermometer von Tonnellot betrug diese Correction,

nachdem die Nullpunkts-, Siedepunkts- und Fadencorrection angebracht waren, $-0,09^{\circ}$. Für die beiden Thermometer Nr. 467—468 von Gerhardt gebe ich in der kleinen Tabelle ihre zeitigen Nullpunkte, ihre Siedepunkte und ferner die Correctionen, die ich bei 150° , 200° , 250° an ihren Angaben anbringen musste, um sie mit dem Luftthermometer in Uebereinstimmung zu bringen. In diese Correctionen sind die Nullpunkts-, Siedepunkts- und Calibercorrectionen mit eingeschlossen.

| | Nullpunkt bei | Siedepunkt bei | Anzubringende Correction | | |
|----------------------|------------------|-------------------|--------------------------|-----------------|-----------------|
| | | | 150° | 200° | 250° |
| Thermometer Nr. 467. | $+0,55^{\circ}$ | $100,80^{\circ}$ | $+0,70^{\circ}$ | $+1,15^{\circ}$ | $+0,06^{\circ}$ |
| „ „ 468. | $+0,50^{\circ}$ | $100,85^{\circ}$ | $+0,47^{\circ}$ | $+0,87^{\circ}$ | $+0,17^{\circ}$ |

Fadencorrection musste nicht angebracht werden, da die Thermometer stets sich bis zu dem betreffenden Theilstrich in dem Leinölbade befanden.

Bei der Messung der höheren Temperaturen wurde stets nur ein Thermometer auf einmal benutzt, um den anderen Gelegenheit zu geben, sich in der Zwischenzeit von der vorausgegangenen starken Erwärmung zu erholen. Aus den fünf erhaltenen Mittelwerthen der Temperatur und des Galvanometerausschlages wurden dann die beiden constanten a und b berechnet. Bei dieser Calibrirung wurden zwar auch die Drähte des Thermoelementes etwa 2 cm weit erwärmt, aber die dadurch bedingte Widerstandsänderung wurde durch den 450 Ohm betragenden Widerstand des äusseren Stromkreises zum Verschwinden gebracht. Erst wurde versucht, die Elemente sowohl vor als nach ihrem Gebrauche zu calibriren, doch musste dies bald aufgegeben werden, da bei der starken Bewegung des Leinöls sich die Löthstellen in den Platten lockerten und nachher fast immer herausbrachen. Die Calibrirung der Elemente wurde immer erst am folgenden Tage vorgenommen (die Elemente wurden am Abend gebraucht), doch hatte sich, wie ich nachher zeigen werde, die Empfindlichkeit des Galvanometers in so kurzer Zeit nicht geändert.

Ein jedes Thermoelement trug zwei zu untersuchende Metallplatten; die eine befand sich in Eis, die andere in

dem oben erwähnten Trichter, und beide konnten leicht gegeneinander vertauscht werden. — Diese Eisen-Neusilberelemente waren, was ihr thermoelectrisches Verhalten anbetrifft, vorzüglich; bei ihrer praktischen Anwendung hatten sie aber zwei Nachtheile. Einmal war der harte Eisendraht stark federnd, sodass die Elemente sehr sorgfältig behandelt werden mussten; trotzdem konnte es nicht vermieden werden, dass die Drähte sehr oft aus der dünnen Metallplatte herausbrachen, was einen grossen Zeitverlust nach sich zog, da die Elemente dann stets wieder frisch calibriert werden mussten. Dann wurde der Eisendraht da, wo er der Löthrohrflamme ausgesetzt war, beinahe immer von Rost angegriffen, sodass er meistens nach einigen Tagen aus der Löthstelle heraus oder kurz über derselben abrostete. Durch Vergolden und Versilbern der Enden des Eisendrahtes wurde dem Vorzubeugen gesucht, aber ohne Erfolg.

Die durch die Thermoelemente gelieferten Ströme wurden durch ein astatisches, vollständig aperiodisch schwingendes Galvanometer gemessen. Bei diesen aperiodisch schwingenden Galvanometern macht sich die elastische Nachwirkung der Aufhängevorrichtung, die bei astatischen Galvanometern überhaupt einen beträchtlichen Theil der Richtkraft beträgt, ganz besonders stark und störend geltend. Diese störende Einwirkung hätte so der Rechnung zugänglich gemacht werden können, wie es durch Kirchhoff und Hanseman¹⁾ geschah, indem diese in die Differentialgleichung der Bewegung der Galvanometernadel eine neue, von der elastischen Nachwirkung abhängige und durch Versuche ermittelnde Constante einführten. Ich zog es vor, durch die Versuchsanordnung selbst die elastische Nachwirkung unschädlich zu machen; dazu war es vor allem nöthig, dass dieselbe möglichst klein, und die anderen die Galvanometernadel richtenden Kräfte möglichst gross gemacht wurden. Das astatische Nadelpaar wurde deshalb an dem feinsten Platindraht, der mir zugänglich war (sogenannter Wollaston'scher Draht), aufgehängt. Die elastische Nachwirkung dieser Drähte ist ausserordent-

1) Kirchhoff und Hanseman, Wied. Ann. 9. p. 1. 1879.

lich viel geringer als diejenige der Coconfäden; ihres grösseren Torsionsmoduls wegen müssen sie entsprechend länger gewählt werden. (Der von mir benutzte Draht hatte eine Länge von 50 cm.) Die ablenkende Kraft des Stromes ist proportional dem magnetischen Moment der Nadeln. Statt Nadeln wurden deshalb Flachmagnete gewählt, 5 cm lang, 1 cm breit 0,6 mm dick, die mittelst eines grossen Ruhmkorff'schen Electromagnets möglichst stark und gleich magnetisirt wurden. Die Schwingungsdauer des astatischen Systems betrug dann zehn Secunden. Jede Spule hatte 1000 Windungen dünnen Kupferdrahtes, und das von den Thermoströmen auf das System der Flachmagnete ausgeübte Drehmoment war so gross, dass ein kleiner Richtmagnet sehr nahe an das Galvanometer gelegt werden konnte, wenn dasselbe bei einem Widerstande des Stromkreises von 450 Ohm für einen Grad Temperaturdifferenz der Löthstellen einen Scalentheil Ausschlag geben sollte. (Entfernung, Fernrohr, Galvanometer gleich zwei Metern.) Dies hatte den Vortheil, dass die Ruhelage der Galvanometermagnete äusserst constant blieb. Von einem Tage zum anderen wechselte sie selten mehr als fünf Scalentheile, und während einer Versuchsreihe war meistens gar keine Veränderung wahrzunehmen. Die elastische Nachwirkung des Aufhängedrahtes machte sich dann so wenig geltend, dass trotz der vollständig aperiodischen Schwingungen der Magnete sich selbst an einem Aufschlag über 400 Scalentheile nach zwei Minuten keine Veränderungen mehr nachweisen liessen. Ausschläge von 20 bis 30 Scalentheilen von irgend einer Stellung aus waren in wenigen Secunden vollendet, und eben diese Zeit war auch nöthig, um durch Regulirung des Gaszuflusses die erste Glüherscheinung der Metallplatte zum Vorschein kommen oder verschwinden zu lassen. Um aber nicht allzu häufig abwechselnd Ausschläge nach beiden Seiten der Scala ablesen zu müssen, was einen grossen Zeitverlust nach sich gezogen hätte, wurde das Galvanometer äusserst sorgfältig so aufgestellt, dass selbst die grössten Ausschläge nach beiden Seiten bis auf 0,1 Scalentheil einander gleich waren. Beim Calibriren der Elemente wurde dann so verfahren,

dass erst drei Minuten nach Schluss des Stromes zehn Ablesungen auf der einen Seite der Scala gemacht wurden, drei Minuten nach Umkehrung des Stromes zehn Ablesungen nach der anderen Seite, und nach drei Minuten nach der zweiten Umkehrung des Stromes wieder zehn Ablesungen nach der ersten Seite. Aus diesen dreissig Ablesungen wurde dann das Mittel genommen. Bei der Beobachtung der Glühtemperatur der Metalle wurde die Platte möglichst nahe an die betreffende Temperatur erhitzt und dann ebenso verfahren. Da immerhin einige Secunden nöthig waren, um das erste Grau erscheinen oder verschwinden zu lassen, so hatte bei den kleinen Temperaturschwankungen das Galvanometer vollständig Zeit zu folgen. Auch wurde abwechselnd Erscheinen und Verschwinden des Grau beobachtet, sodass das Galvanometer sich abwechselnd bei wachsendem und abnehmenden Ausschlage einstellte, und deshalb die letzten Spuren von Fehlern im Mittel sich wegheben mussten.

Ich habe bereits den Grund erwähnt, der es unmöglich machte, die Elemente sowohl vor als nach der Bestimmung der Graugluth zu calibriren. Die Calibrirung geschah immer erst am folgenden Tage. Ich musste mich deshalb vergewissern, ob sich möglicherweise die Empfindlichkeit des Galvanometers in der kurzen Zwischenzeit änderte. Ich bestimmte deshalb die Empfindlichkeit des Galvanometers an einer Reihe von Tagen. Ein Normaldaniell gab bei ca. 50000 Ohm Widerstand einen Ausschlag:

| | | | |
|---------------------|-----|-------|---------------|
| am 3. December 1887 | von | 325,7 | Scalentheilen |
| " 5. " | " " | 325,4 | " |
| " 8. " | " " | 325,7 | " |
| " 9. " | " " | 325,7 | " |
| " 12. " | " " | 325,7 | " |
| " 13. " | " " | 325,6 | " |

Ich konnte deshalb sicher sein, dass eine merkliche Aenderung der Empfindlichkeit von einem Tag zum anderen nicht eintrat.

Die grösste Rolle spielt bei diesen Messungen das Auge des Beobachters. Es ist hinlänglich bekannt, wie sehr die Empfindlichkeit des Auges durch absolute Dunkelheit gesteigert wird. Dies liess sich auch hier sehr schön nachweisen.

Begab ich mich an einem hellen Tage ins Dunkelzimmer und begann sofort zu beobachten, so fand ich die Temperatur der ersten Lichtemission oft 50 bis 60° zu hoch liegend. Beim Verweilen im Dunkelzimmer steigerte sich die Empfindlichkeit des Auges, um allmählich einen constanten Werth anzunehmen. Oft war dazu eine halbe Stunde nöthig; natürlich wurden die Galvanometerablesungen zur weiteren Berechnung erst dann benutzt, wenn sie nicht mehr stetig abnahmen, sondern um einen constant bleibenden Mittelwerth schwankten. So fand ich am 9. Juni 1888 für die Temperatur der beginnenden Graugluth bei Platin gleich nach Betreten des Dunkelzimmers 485,5° nach Verlauf von fünf bis zehn Minuten 446,5°, nach weiteren fünf bis zehn Minuten 408,2°, dann constant im Mittel 404,0°. Diese äusserste Empfindlichkeit des Auges bleibt nicht nur mehrere Stunden constant, bis endlich zu grosse Ermüdung und Abspannung des Beobachters eintritt, sondern sie ist eine jedem Beobachter eigenthümliche Constante. Während meines monatelangen Beobachtens konnte ich keine Veränderung dieser äussersten Empfindlichkeit meiner Augen constatiren.

Von der jeweiligen Empfindlichkeit meines Auges war auch die Art und Weise abhängig, wie ich die Farbenänderung der Metallplatte bei steigender Temperatur wahrnahm. Hatte mein Auge noch sehr ungenügende Empfindlichkeit, so nahm ich erst ein dunkles Grau wahr, das, ohne viel heller zu werden, in dunkles Roth überging. Bei genügender Empfindlichkeit des Auges wurde dies Grau bei steigender Temperatur immer heller und heller, beinahe ganz weiss, um dann in das hellste, lichteste Feuerroth überzugehen.

Um das Auftreten dieses ersten, düstersten Graues mit genügender Sicherheit wahrzunehmen, ist absolute Dunkelheit erforderlich. Die Versuche wurden deshalb im Dunkelzimmer bei Nacht ausgeführt. Selbst in dem vorzüglichen Dunkelzimmer des hiesigen physikalischen Laboratoriums konnte ich nach zehn bis fünfzehn Minuten bei Tage an einzelnen Stellen Licht entdecken, obwohl zu gleicher Zeit die empfindlichsten photographischen Platten vollständig schleierfei entwickelt werden konnten. Schon diese geringsten Spuren Licht

wirkten äusserst störend, namentlich lösten sie auch die vielfach beschriebenen entoptischen Erscheinungen aus, bestehend in dem Auftreten heller Wolken und Nebel in dem Gesichtsfelde. Bei absoluter Dunkelheit und möglichst ruhiger Haltung des Kopfes und der Augen konnte ich mich aber für die zu einer Beobachtungsreihe nöthigen Zeit von diesen entoptischen Erscheinungen, die ein genaues Beobachten unmöglich machten, vollständig befreien. Das äusserst geringe, gleichmässige Eigenlicht, von dem das Auge selbst dann noch erfüllt war, störte die Genauigkeit der Beobachtungen nicht.

Beugte ich zur Beobachtung mein Gesicht in die Oeffnung des oberen Trichters, so befand sich mein Auge ungefähr 20 cm von der glühenden Platte entfernt. Grössere Annäherung ging nicht wohl an, da schon die in dem Trichter aufsteigende heisse Luft das Beobachten sehr unangenehm erschwerte. So lange die Platte nicht glühte, hatte ich ein absolut dunkles Gesichtsfeld vor mir. Hatte ich durch Regulirung des Gaszuflusses erreicht, dass die erste Spur dieses düstersten Graues eben erschien, resp. verschwand, so wurde einem zweiten Beobachter, der das in einem Nebenzimmer aufgestellte Galvanometer unablässig verfolgte, ein Glockensignal gegeben, um den augenblicklichen Galvanometeraus-
schlag zu notiren. Um das allererste Auftreten des Graues wahrzunehmen, ist es nöthig, nicht die Lamellenmitte zu fixiren, sondern dem Auge eine solche Stellung zu geben, dass das Bild derselben auf die empfindlichste Stelle der Netzhaut fällt, was durch Probiren leicht erreicht wird. Es wurde regelmässig abwechselnd auf Erscheinen und Verschwinden des ersten Graues eingestellt. In seiner Abhandlung über die Schwellenwerthe der Lichtempfindung schreibt Ebert¹⁾: „Auf diese Weise (auf welche Weise siehe l. c.) wurde die eben untermerkliche und die eben übermerkliche Reizschwelle zugleich bestimmt. Durchweg wurde, wie zu erwarten, der erstgenannte Schwellenwerth kleiner als der zweite gefunden, d. h. das Auge ist im Stande, einen sich in seiner Intensität stetig vermindernden Lichtreiz bis zu einer minimalen Grösse herab zu verfolgen, die unter derjenigen

1) Ebert, Wied. Ann. 33. p. 136. 1888.

liegt, bei welcher ein neu im Blickfelde des Bewusstseins auftauchender Reiz die Aufmerksamkeit erweckt und percipirt wird, ein Resultat, welches seit Fechner von zahlreichen Forschern auch auf anderen Sinnesgebieten bestätigt worden ist.“ Im Gegensatze hierzu ergeben sowohl die Beobachtungen des Hrn. Prof. Weber, wie die meinigen, dass die Temperaturen, die zum Erscheinen und Verschwinden des ersten Grau nöthig sind, einander vollständig gleich waren.

Es wurden immer zehn Einstellungen nacheinander gemacht, dann die Stromrichtung im Galvanometer umgekehrt, und die zwei bis drei Minuten, welche für die Schwingung des Galvanometers erforderlich waren, brauchte das äusserst angestrengte Auge zu seiner Erholung. Nach je 30 Ablesungen wurde die Ruhelage bestimmt. Nachdem bei einer Platte 60 bis 120 Ablesungen gemacht waren, wurden die Platten im Trichter und Eise miteinander vertauscht und die zweite Platte auf gleiche Weise untersucht; am Schlusse wurden nochmals 30 Controleinstellungen an den ersten Platten gemacht. So lange die Platten von dem zweiten Beobachter umgeschaltet wurden, verhüllte ich meine Augen mit einem Tuche, um jeden Lichteindruck von denselben abzuhalten.

Die Genauigkeit, mit der die einzelnen Galvanometerausschläge unter sich übereinstimmten, ist je nach Umständen verschieden. Die jeweilige körperliche und geistige Disposition des Beobachters spielt dabei eine Hauptrolle. Im allgemeinen konnte auf fünf bis zehn Scalentheile (ebensoviel Temperaturgraden entsprechend) eingestellt werden, doch erhielt ich durch fortwährende Uebung einstmals eine Reihe von zehn Ablesungen, in welcher der Unterschied der höchsten und niedersten beobachteten Temperatur nur 2° betrug. Einige vollständige Beobachtungsprotocolle geben darüber nähere Auskunft.

Ich erlaube mir, an dieser Stelle den Herren K. Sulzberger und Seminarlehrer V. Morger, die mir in liebenswürdigster Weise ihre Abende zur Verfügung stellten, um die Galvanometerablesungen und das Umschalten der Platten zu besorgen, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Ich gebe im Folgenden die an 25 Metallplatten beob-

achteten Temperaturen der eben beginnenden Graugluth an. Bei jeder Platte ist die Nummer des Thermoelementes angegeben, das zu ihrer Untersuchung diente, sodass leicht ersichtlich ist, welche zwei Platten gemeinsam untersucht wurden. Für die beiden ersten Untersuchungen gebe ich die Beobachtungsprotocolle vollständig an als Kriterium für die Genauigkeit der Methode.

1) Platin.

| <i>A</i> | | | <i>B</i> | | |
|-----------------------------|--------------------|--|----------------------------|-----------------------------|--|
| Platte 1 (Thermoel. Nr. 1) | 403,9 ^o | | Platte 1 (Thermoel. Nr. 3) | 406,9 ^o | |
| " 2 (" " 2) | 403,2 | | " 2 (" " 4) | 408,3 | |
| " 3 (" " 3) | 404,8 | | " 3 (" " 5) | 409,2 | |
| " 4 (" " 4) | 404,1 | | | Mittel = 408,1 ^o | |
| Mittel = 404,0 ^o | | | | | |

A und *B* waren zwei verschiedene Sorten Platinblech; *B* reineres Platin. Es ist daraus ersichtlich, dass auch der Beginn der Glühtemperatur in hohem Maasse abhängig ist von fremden Verunreinigungen der Metalle. Die Platten *A4* und *B2* sassen an dem gleichen Thermoelemente (wobei etwaige Fehler der Kalibrirung des Elementes weggfallen), und zeigten eine Temperaturdifferenz von 4,2^o, während die Temperaturdifferenz der Mittel von *A* und *B* 4,1^o beträgt. Ich gebe hier das Beobachtungsprotocoll der Platten *A1* und *2* vom Abend des 9. Februar 1888.

Die Ablesungen am Galvanometer betragen:

| Rahelage 500. | | | Platte <i>A1</i> . | | | Rahel. 500 | | |
|----------------|---------|---------|--------------------|-------|--------|--------------|-------------------|-------|
| 6 U. 35 | 6 U. 47 | 6 U. 51 | | | | | | |
| 930,5 | 82,0 | 910,0 | 91,5 | 912,5 | 896,5 | 112,5 | 917,5 | |
| 925,0 | 80,5 | 908,5 | 88,5 | 900,0 | 888,5 | 84,5 | 915,0 | |
| 925,0 | 83,5 | 905,0 | 95,5 | 900,5 | 883,5 | 84,5 | 908,0 | |
| 918,0 | 86,0 | 904,0 | 98,5 | 896,5 | 915,0 | 92,0 | 911,5 | |
| 917,0 | 86,0 | 901,5 | 106,5 | 912,5 | 908,5 | 102,5 | 911,0 | |
| 915,0 | 88,0 | 896,0 | 111,5 | 907,5 | 907,0 | 103,0 | 901,5 | |
| 926,0 | 85,0 | 893,0 | 105,5 | 907,5 | 920,5 | 103,0 | 904,5 | |
| 929,0 | 81,5 | 892,0 | 86,0 | 912,5 | 913,5 | 93,0 | 903,5 | |
| 925,0 | 81,0 | 915,0 | 90,5 | 909,5 | 911,5 | 99,5 | 898,0 | |
| 926,0 | 83,0 | 916,5 | 90,5 | 908,0 | 908,0 | 90,0 | 895,0 | |
| Mittel. | | | | | Rahel. | | Rahel. | |
| Ausschl. 425,7 | 416,4 | 404,1* | 403,7 | 406,6 | 503 | 405,2 | 403,6 | 406,5 |
| | | | Mittel 404,8 | | | Mittel 405,1 | | |
| | | | | | | | Hauptmittel 405,0 | |

* Bis hierher hatte die Empfindlichkeit des Auges zugenommen.

Hierbei wurde stets regelmässig abwechselnd auf Erscheinen und Verschwinden des ersten Graues eingestellt.

Platte A2.

| 7 U.30 | | | 7 U.40 | | | 7 U.47 | | | 8 U.10 | | |
|----------|--------------|-------|-------------|------|--|--------|-------------------|-------|-------------|------|--|
| Ruhel. | 95,0 | 900,0 | | 91,5 | | Ruhel. | 93,0 | 904,0 | | 97,5 | |
| 500 | 97,5 | 903,5 | 100,0 | | | 500 | 97,5 | 901,5 | 103,0 | | |
| | 91,5 | 903,5 | 98,0 | | | | 82,5 | 895,0 | 106,5 | | |
| | 91,0 | 907,5 | 98,5 | | | | 88,5 | 903,0 | 110,5 | | |
| | 95,5 | 905,0 | 88,0 | | | | 97,5 | 905,0 | 87,5 | | |
| | 90,5 | 903,0 | 90,0 | | | | 84,5 | 900,5 | 106,5 | | |
| | 94,0 | 905,5 | 105,5 | | | | 85,5 | 898,0 | 109,5 | | |
| | 86,0 | 904,5 | 92,5 | | | | 97,5 | 898,5 | 87,5 | | |
| | 94,0 | 898,0 | 95,5 Ruhel. | | | | 100,0 | 901,0 | 93,5 Ruhel. | | |
| | 88,5 | 901,5 | 94,5 500 | | | | 97,0 | 910,5 | 102,0 500 | | |
| Mittl. | | | | | | | | | | | |
| Ausschl. | 407,7 | 403,2 | 404,6 | | | | 408,4 | 401,7 | 400,0 | | |
| | Mittel 405,2 | | | | | | Mittel 403,4 | | | | |
| | | | | | | | Hauptmittel 404,3 | | | | |

Daraus berechnete man die oben angeführten Temperaturen.

- 2) Palladium. 1. Platte. (Thermoelement Nr. 2) 407,3°
 2. " (" " 3) 408,8
 Mittel 408,0°

Beobachtungsprotocoll vom 16. Februar 1888 für Platinplatte A3 und Palladiumplatte Nr. 1.

Platinplatte A3.

| 6 U.20 | | | 6 U.54 | | |
|----------|-------|-------|--------------|--------------|--------------|
| Ruhel. | 944,5 | 62,0 | 932,0 | | |
| 500 | 959,5 | 63,0 | 926,5 | | |
| | 945,0 | 67,5 | 924,0 | | |
| | 945,0 | 67,0 | 922,5 | | |
| | 947,5 | 69,0 | 915,5 | | |
| | 945,0 | 56,5 | 920,5 | | |
| | 951,0 | 56,0 | 917,5 | | |
| | 948,5 | 56,0 | 918,0 | | |
| | | 61,0 | 914,0 Ruhel. | | |
| | | 59,5 | 926,5 500 | | |
| | | | 918,5 | 70,0 | 910,5 Ruhel. |
| | | | 918,5 | 79,0 | 918,5 500 |
| Mittl. | | | | | |
| Ausschl. | 449,3 | 438,3 | 421,7 | 417,0* | 416,5 414,2 |
| | | | | Mittel 415,9 | |

* Bis hierher hatte die Empfindlichkeit des Auges zugenommen.

| 7 U.09 | | | 7 U.24 | | |
|----------|--------------|-------|-------------|--------------|--------------|
| Ruhel. | 896,5 | 86,0 | 84,0 | | |
| 500 | 895,0 | 86,0 | 83,0 | | |
| | 890,0 | 86,0 | 85,0 | | |
| | 817,0 | 88,0 | 90,0 | | |
| | 812,0 | 80,0 | 82,0 | | |
| | 917,5 | 88,5 | 83,0 | | |
| | 921,0 | 80,0 | 93,0 | | |
| | 919,5 | 85,0 | 79,0 | | |
| | 919,5 | 80,0 | 76,5 Ruhel. | | |
| | 917,0 | 81,5 | 79,0 500 | | |
| | | | 922,5 | 84,0 | 920,5 502 |
| | | | 922,5 | 83,0 | 921,5 |
| | | | 922,5 | 83,5 | 912,5 |
| | | | 904,0 | 80,0 | 916,0 |
| | | | 918,5 | 81,5 | 912,5 |
| | | | 924,5 | 83,0 | 910,0 |
| | | | 922,0 | 78,0 | 914,0 |
| | | | 923,0 | 83,0 | 921,5 |
| | | | 922,5 | 88,0 | 921,5 Ruhel. |
| | | | 922,5 | 84,0 | 920,5 502 |
| Mittl. | | | | | |
| Ausschl. | 410,5 | 415,9 | 416,3 | 416,7 | 418,0 416,3 |
| | Mittel 414,2 | | | Mittel 416,7 | |

Palladiumplatte Nr. 1.

| Ruhel. 500 7 U. 45 | | | Ruhel. 500 8 U. 05 | | |
|-----------------------|-------|-------------|-----------------------|-------|-------------|
| 83,5 | 922,5 | 85,0 | 82,5 | 929,5 | 78,0 |
| 78,5 | 919,0 | 85,5 | 88,0 | 927,5 | 83,0 |
| 81,0 | 917,0 | 86,0 | 85,0 | 924,0 | 83,5 |
| 80,0 | 912,0 | 84,5 | 84,0 | 918,5 | 79,5 |
| 83,0 | 922,0 | 84,0 | 80,0 | 914,0 | 81,5 |
| 83,0 | 923,0 | 75,0 | 81,0 | 916,0 | 78,0 |
| 85,0 | 926,0 | 80,0 | 83,0 | 915,5 | 86,0 |
| 84,0 | 920,0 | 83,0 | 84,5 | 916,5 | 79,0 |
| 82,5 | 924,0 | 82,0 Ruhel. | 87,5 | 915,5 | 79,0 Ruhel. |
| 83,5 | | 81,5 500 | 86,0 | 920,0 | 81,5 500 |
| Mittl. | | | | | |
| Ausschl. | 417,6 | 419,8 | 416,6 | 415,9 | 419,7 |
| Mittel 418,0 | | | Mittel 418,2 | | |

Palladiumplatte Nr. 1.

Platinplatte A3.

| Ruhel. 500 8 U. 15 | | | Ruhel. 500 8 U. 40 | | |
|-----------------------|-------|-------------|-----------------------|-------|--------------|
| 81,5 | 920,5 | 87,0 | 912,5 | 90,0 | 913,0 |
| 78,0 | 924,5 | 85,5 | 915,0 | 79,0 | 914,5 |
| 83,5 | 923,5 | 83,5 | 912,0 | 84,0 | 900,0 |
| 82,0 | 923,0 | 83,5 | 926,5 | 82,0 | 918,0 |
| 85,0 | 919,5 | 85,5 | 911,5 | 91,0 | 912,0 |
| 76,0 | 925,5 | 79,5 | 922,5 | 79,0 | 911,0 |
| 80,0 | 921,5 | 86,0 | 920,0 | 83,0 | 919,5 |
| 79,5 | 922,5 | 85,0 | 923,5 | 90,0 | 927,5 |
| 84,5 | 921,5 | 86,0 Ruhel. | 918,5 | 80,0 | 904,0 Ruhel. |
| 83,5 | 920,5 | 83,5 500 | 924,5 | 82,0 | 918,5 500 |
| Mittl. | | | | | |
| Ausschl. | 418,7 | 422,2 | 415,5 | 418,6 | 416,0 |
| Mittel 418,8 | | | Mittel 416,1 | | |

Platin 415,9 414,2 416,7 416,1 Hauptmittel 415,7
Palladium 418,0 418,2 418,8 Hauptmittel 418,3

Daraus berechnete sich die Glühtemperatur für Platin
404,8°, Palladium 407,3°.

3) Silber, chemisch rein.

| | | |
|---------------------------|--------|---------|
| 1. Platte. (Thermoelement | Nr. 5) | 414,7° |
| 2. " (" | " 6) | 413,1 |
| 3. " (" | " 7) | 416,4 |
| Mittel | | 414,7°. |

4) Kupfer.

| | | |
|---------------------------|--------|--------|
| 1. Platte. (Thermoelement | Nr. 6) | 412,8° |
| 2. " (" | " 7) | 416,2 |
| 3. " (" | " 8) | 415,8. |

Die Kupferplatten hatten sich während der Untersuchung oxydirt, sodass sich diese Zahlen auf oxydirtes Kupfer beziehen.

5) Messing.

| | | |
|------------|-----------------------|--------|
| 1. Platte. | (Thermoelement Nr. 8) | 405,3° |
| 2. " | (" " 9) | 406,5 |
| 3. " | (" " 10) | 403,7 |
| Mittel | | 405,2° |

Die Messingplatten waren während der Untersuchung leicht angelaufen.

6) Neusilber.

| | | |
|------------|-----------------------|---------|
| 1. Platte. | (Thermoelement Nr. 9) | 404,8° |
| 2. " | (" " 10) | 402,3 |
| 3. " | (" " 11) | 400,7 |
| Mittel | | 402,6°. |

Die Platten Nr. 1 und 2 hatten sich während der Untersuchung leicht oxydirt, während Platte Nr. 3 ihre metallische Fläche unverändert beibehielt.

7) Eisen.

| | | |
|------------|------------------------|---------|
| 1. Platte. | (Thermoelement Nr. 11) | 403,9° |
| 2. " | | 405,3 |
| Mittel | | 404,6°. |

Dieser Werth für Platte Nr. 2 wurde durch Differentialbeobachtungen gegen ein Platinblättchen A bestimmt, für welches früher die Temperatur von 404° ermittelt worden war. Hr. Prof. Weber hatte für Eisen eine Temperatur bedeutend unter derjenigen des Platins gefunden. Dies erklärt sich dadurch, dass derselbe eine andere Sorte Eisen mit schwarzer, rauher Oberfläche untersuchte, während meinen Eisenplättchen durch wiederholtes Auswalzen eine vollkommen spiegelnde Oberfläche gegeben war. Auch diese Plättchen oxydirten sich während der Untersuchung.

8) Gold. (Chemisch rein.)

| | | |
|------------------|------------------|----------------|
| 1. Platte 422,8° | 2. Platte 423,9° | Mittel 422,3°. |
|------------------|------------------|----------------|

Der Werth der Platte Nr. 1 war durch Differentialbestimmungen gegen eine Platinplatte A, der Werth für Platte Nr. 2 durch Differentialbestimmung gegen die Eisenplatte Nr. 1 gefunden worden. Die Differenz der Mittel der für Gold und Eisen gefundenen Temperaturen beträgt 18,7°, während durch sie eine weitere directe Bestimmung zu 20,0° gefunden wurde.

Die Temperaturen, bei welchen die Metalle zu glühen beginnen, liegen also über 100° tiefer als nach der Angabe von Draper. Auch lassen sich bei optisch sich so ähnlich

verhaltenden Körpern wie die Metalle, wenn auch geringe, so doch bestimmt nachweisbare Differenzen dieser Temperaturen constataren. In Bezug auf die Temperatur ihrer beginnenden Lichtemission ordnen sich die Metalle in folgender Reihe:

| | | | |
|-----------------------|------------------|-------------------|------------------|
| 1. Neusilber . . . | 403 ^o | 6. Platin | 408 ^o |
| 2. Platin (unrein). . | 404 | 7. Silber | 415 |
| 3. Eisen | 405 | 8. Kupfer | 415 |
| 4. Messing | 405 | 9. Gold | 423 |
| 5. Palladium . . . | 408 | | |

Dies Resultat scheint im Widerspruch zu stehen mit dem von Kirchhoff abgeleiteten und seither in alle Lehrbücher der Physik übergegangenen Satze, dass alle Körper bei derselben Temperatur zu glühen beginnen. Dieser Satz ist nicht richtig. Der Fehler, der in seiner Ableitung begangen wurde, besteht in einer Gleichsetzung der Begriffe „Beginn des Glühens“ und „Beginn der Aussendung einer Strahlengattung von der Wellenlänge der sichtbaren Strahlen“. Nun ist unser Auge aber nicht befähigt, diese Strahlen schon wahrzunehmen, wenn sie nur mit kleinster Energie auftreten. Die Zahlen, welche für den Beginn des Glühens gegeben werden, zeigen uns also nur, in welchem Momente die Energie der sichtbaren Strahlen einen gewissen Schwellenwerth überschritten hat; über die Temperatur, bei welcher sich diese Strahlen zu entwickeln beginnen, geben sie uns nicht den geringsten Aufschluss.

Hr. Prof. Weber hatte für Kohle gefunden, dass das erste auftretende Grau durch Strahlen von der Wellenlänge der grüngelben Strahlen hervorgerufen wird. Es ist nun äusserst wahrscheinlich, dass dies erste Grau, welches jede Farbe bei möglichst schwachem Auftreten im Auge bewirkt, auch bei den Metallen durch dieselbe Strahlengattung hervorgebracht wird. Es geht dies daraus hervor, dass unser Auge für diese grüngelbe Strahlengattung ungleich empfindlicher ist, wie für die übrigen Strahlen. Zeichnen wir uns (Fig. 9 Taf. II), gestützt auf die Zahlen von Ebert,¹⁾ für die Schwellenwerthe des Auges eine Curve derart, dass wir für die Strahlen jeder Wellenlänge Ordinaten auftragen, umgekehrt pro-

1) Ebert, l. c.

portional der Reizempfindlichkeit des Auges, so sehen wir, dass diese Curve aus anderen Curven, welche die Energie der Strahlen eines Spectrums angeben, stets zuerst die Partien herauschneidet, welche der grüngelben Strahlung entsprechen. Dabei können diese zweiten Curven sehr beliebig gelegen sein, falls sie nur keine starken Maxima und Minima besitzen. Auf diesen Punkt hat bereits Ebert¹⁾ aufmerksam gemacht. Dass dies erste Grau auch bei den Metallen durch die grüngelbe Strahlung hervorgebracht wird, konnte ich sehr leicht nachweisen, indem ich die einer Versuchsanordnung von von Bezold²⁾ zu Grunde liegende Idee benutzte. Ein dünner Metalldraht wurde zwischen starken Metallklemmen eingespannt und durch den electrischen Strom zum Glühen gebracht. Dabei glüht nicht der ganze Draht gleichmässig, sondern seine Enden bleiben dunkel, da ihnen durch Leitung sehr viel Wärme entzogen wird. Durch ein Prisma mit gerader Durchsicht, dessen brechende Kante dem gespannten Drahte parallel gestellt war, wurde dann eine solche Partie der Drahtenden beobachtet, dass ein hellglühender und ein dunkler Theil des Drahtes zu gleicher Zeit sichtbar war. Das Spectrum hatte dann nicht die Form eines Parallelogramms, wie es der Fall gewesen wäre, wenn der ganze Draht gleichmässig geglüht hätte, sondern hatte die Form eines Dreiecks. Die Basis desselben, ein vollständiges Spectrum, entsprach dem hellglühenden Theile des Drahtes, seinen immer dunkler werdenden Partien entsprachen Spectren, deren Enden immer vollständiger verschwanden. Die Spitze des Dreiecks lief in einen grauen Zipfel aus. Projicirte man denselben auf die Basis des Dreiecks, so traf man bei Drähten jeglicher Metallsorte stets auf die Partie der grüngelben Strahlung.

Die in dieser Arbeit ermittelten Temperaturen der beginnenden Graugluth zeigen demnach, bei welchen Temperaturen die Energie der von einem erwärmten Metalle ausgesandten grüngelben Strahlung ein und denselben Werth erreichte.

Physik. Laborat. des eidg. Polytechn. Zürich, Juli 1888.

1) Ebert l. c.

2) von Bezold. Wied. Ann. 21. p. 175. 1884.

**X. Ueber die Reflexion des Lichtes an parallel zur optischen Axe geschliffenem Quarz;
von Robert Ritter.**

(Hierzu Taf. III Fig. 1–6.)

Auf Anrathen des Hrn. Geheimrath v. Helmholtz habe ich mit Hülfe der Wernicke'schen Methode¹⁾ die Reflexion des Lichtes an parallel der optischen Axe geschliffenem Quarz untersucht und gefunden, dass auch bei der Reflexion an diesem doppeltbrechenden Medium nur die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente eine Phasenänderung erleidet; ferner war die Wernicke'sche Methode genau genug, um trotz der schwachen Doppelbrechung des Quarzes eine Verschiedenheit des Haupteinfallswinkels je nach der Lage der optischen Axe zur Einfallsebene nachzuweisen. Ich will hier gleich bemerken, dass die Quarzplatte noch mit der vom Polirmittel herrührenden Oberflächenschicht behaftet war; diese fremdartige Oberflächenschicht übt indessen nur eine modificirende Wirkung aus, wie aus den letzten von Hrn. Wernicke veröffentlichten Versuchen²⁾ hervorgeht.

Bevor ich zur Beschreibung meiner im hiesigen physikalischen Institute angestellten Versuche übergehe, drängt es mich, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrath v. Helmholtz, für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die Unterstützung und das Interesse, welches er meiner Arbeit stets zu Theil werden liess, meinen ehrerbietigsten Dank zu sagen.

Auch kann ich es nicht unterlassen, an dieser Stelle Hrn. Dr. Wernicke für seine gefälligen Auskünfte und Rathschläge zu danken, welche mir in manchen Einzelheiten von grossem Werth waren.

A. Vorversuch an Glas.

Um mich mit der Methode des Hrn. Wernicke bekannt zu machen, wiederholte ich zunächst seine Versuche an Glas.

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 25. p. 203. 1885; 30. p. 452. 1887.

2) W. Wernicke, Wied. Ann. 30. p. 452. 1887.

Die Luftschicht zwischen zwei zusammengekitteten planparallelen Crownglasplatten zeigte ein Ringsystem, mit einer gleichmässig gefärbten dicksten Stelle in der Mitte, deren Ausdehnung etwa $\frac{1}{2}$ qcm betrug, sodass also diese gleichmässig gefärbte Mitte zu den Versuchen verwendet werden konnte.¹⁾ Die zusammengekitteten Platten befestigte ich vertical über der Mitte des Tischchens eines Spectrometers, durch dessen Collimatorrohr von einem Heliostaten reflectirte Sonnenstrahlen auf die Platten fielen; am Spectrometer wurden die Einfallswinkel gemessen, während zur Bestimmung der Lage der Interferenzstreifen im Spectrum ein selbständiges, schwach vergrößerndes Fernrohr (*F*, s. Fig. 1 oder Fig. 6) diente, dem ein Prismensystem à vision directe (*G*) vorgesetzt wurde. Das Fernrohr war mit einem Ocularschraubenmikrometer *M* versehen, und hinter dem Ocular befand sich ein drehbares Nicol'sches Prisma *N*. — Da es mir anfangs nicht gelang, bei directem Einstellen des Beobachtungsfernrohres *F* auf den schmalen, im Unendlichen befindlichen Spalt s_1 die Interferenzstreifen in einem einheitlichen Spectrum mit deutlichen Fraunhofer'schen Linien zu erhalten, so verzichtete ich zunächst auf den Vortheil der Wernicke'schen Methode, den Einfallswinkel ganz genau zu bestimmen, und ordnete beim Versuch mit den Crownglasplatten die Beobachtungsapparate so an, wie es in Fig. 1 abgebildet ist. Diese Anordnung unterscheidet sich von der des Hrn. Wernicke darin, dass ich das von der Luftschicht reflectirte Licht zunächst durch ein zweites Collimatorrohr C_2 gehen liess, auf dessen schmalen Spalt s_2 das selbständige Beobachtungsfernrohr *F* eingestellt wurde. Dieser schmale Spalt s_2 ersetzte zugleich den Schirm, welcher das von der ersten Fläche der vorderen und das von der zweiten Fläche der hinteren Glasplatte reflectirte Licht abblenden muss. Um aber bei dieser Anordnung genügende Intensität für die Beobachtung des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes zu erhalten, musste ich den ersten Collimatorsplatt s_1 breit machen. Bei dem Versuch mit den Crownglasplatten betrug

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 25. p. 208. 1885.

die Spaltbreite desselben 7'. Auf die Platten fiel somit nicht vollständig paralleles Licht, sondern Strahlen, welche untereinander Winkel bildeten, die $\leq 7'$ waren. Die in der Tabelle I angegebenen Einfallswinkel sind somit Mittelwerthe, indem bei Gegenüberstehen von Collimator C_1 und Fernrohr S das Mittel aus den Einstellungen auf die beiden Kanten des Collimatorspaltes s_1 genommen wurde, während die zweite Ablesung durch Fadenkreuzspiegelung an den planparallelen Platten erhalten wurde. Da indessen die in der Tabelle angegebenen Wellenlängen durch Einstellen des Ocularmikrometers auf die Mitte der Interferenzstreifen gefunden wurden, so kann man die angegebenen Einfallswinkel und Wellenlängen als zusammengehörend betrachten. Man sieht übrigens die Berechtigung meiner Anordnung — so lange es sich nur darum handelt, nachzuweisen, dass das parallel der Einfallsebene polarisirte Licht keine Phasenänderung erleidet — leicht ein, wenn man bedenkt, dass bei Einfallswinkeln zwischen 55 und 60° einem Fehler von $\pm 3\frac{1}{2}'$ in der Bestimmung des Einfallswinkels eine Aenderung der nach der Formel:

$$d = \frac{m \cdot \lambda}{2 \cdot \cos \alpha}$$

berechneten Dicke der Luftschicht um 0,0016 — 0,0018 des erhaltenen Werthes d entspricht, dass also selbst der grösste überhaupt mögliche Fehler in der Bestimmung des Einfallswinkels die Zahlen d in der Tabelle I nur um Grössen verändern würde, welche innerhalb der übrigen Beobachtungsfehler liegen und daher keinen Einfluss haben auf die erreichbare Genauigkeit in der Uebereinstimmung der aus verschiedenen Einfallswinkeln berechneten Zahlen d . Dementsprechend zeigte sich trotz der grossen Spaltbreite des ersten Collimators keine störende Verbreiterung der Interferenzstreifen.

Die Tabelle I enthält in der ersten Columnne die Einfallswinkel α , in der zweiten die Ordnungszahl m der Interferenzstreifen, in Columnne 3—6: die interferirenden Wellenlängen im parallel und im senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Licht, und die aus ihnen nach der Formel:

$$d = \frac{m \cdot \lambda}{2 \cdot \cos \alpha}$$

berechneten Dicken der Luftschicht in 0,0₅1 mm — während die letzte Columnne das Datum der Messung angibt.

Tabelle I.
Luftschicht zwischen Crown Glas.

| α | m | $\lambda \parallel$ | $\lambda \perp$ | $d \parallel$ | $d \perp$ | Datum für $d \parallel$ |
|----------|-----|---------------------|-----------------|---------------|-----------|-------------------------|
| 55° 20' | 3 | 561,6 | 574,1 | 1481 | 1514 | 19. Juli 1886 |
| | 4 | 422,2 | | 1484 | | |
| 56 — | 3 | 550,7 | 581,5 | 1477 | 1560 | 26. " " |
| | 4 | 413,6 | | 1479 | | 30. " " |
| 56 15 | 3 | 549,7 | 590,2 | 1484 | 1593 | 6. Aug. " |
| | 4 | 411,7 | | 1482 | | |
| 56 30 | 3 | 543,7 | 639,5 | 1478 | 1738 | 9. " " |
| | 4 | 409,5 | | 1484 | | 7. " " |
| 56 45 | 3 | 540,2 | | 1478 | | 9. " " |
| | 4 | 405,9 | | 1481 | | |
| 57 — | 3 | 535,6 | | 1475 | | 10. " " |
| | 4 | | 505,4 | | 1856 | |
| | 3 | 534,1 | | 1471 | | 12. " " |
| 57 30 | 3 | 527,1 | | 1471 | | |
| | 4 | | 508,3 | | 1892 | |
| 58 30 | 3 | 513,2 | | 1473 | | 13. " " |
| | 4 | | 503,9 | | 1929 | |

Die Interferenzstreifen waren wegen der Form der Luftschicht nach dem rothen Ende des Spectrums hin convex, und wurde immer auf die äusserst zum rothen Ende hin gelegene, den Fraunhofer'schen Linien parallele Stelle derselben eingestellt. *Die Platten waren noch mit der vom Polirmittel herrührenden Oberflächenschicht behaftet.* Die Wellenlängen der Streifen im senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Licht sind zum Theil nur geschätzt; sie dürfen daher nicht zu Messungen der Phasendifferenzen verwendet werden.

Die in Tabelle I angegebenen Zahlen sind — ungünstiger Witterung wegen, und weil ich zum schnellen Beobachten noch nicht geübt genug war — im Laufe von etwa drei Wochen (Ende Juli und Anfang August 1886) gemessen worden; trotzdem stimmen die im parallel zur Einfallsebene polarisirten Licht erhaltenen Zahlen $d \parallel$ für die Dicke der Luftschicht gut überein — ein Zeichen für die grosse Unempfindlichkeit der Kittbefestigung gegen Temperatureinflüsse.

B. Versuche an parallel zur optischen Axe geschliffenem Quarz.

1. Schraubenapparat. — Um die Reflexion des Lichtes an parallel zur optischen Axe geschliffenem Quarz mit Hülfe der Wernicke'schen Methode zu untersuchen, musste die hintere Glasplatte durch eine Quarzplatte ersetzt werden, d. h. die Versuche mussten an einer Luftschicht zwischen Glas und Quarz angestellt werden. Um diese Luftschicht möglichst gleichmässig machen zu können und zugleich im Stande zu sein, dieselbe je nach dem Zwecke des betreffenden Versuchs nach Wunsch bald dicker, bald dünner zu erhalten, wurde nach der Idee des Hrn. Geheimraths v. Helmholtz in der mechanischen Werkstatt von Franz Schmidt und Hänsch ein Schraubenapparat hergestellt, dessen Totalansicht Fig. 2 zeigt, während in Fig. 3 sein verticaler Durchschnitt, in Fig. 4 und 5 seine beiden Haupttheile abgebildet sind. Zunächst wurde eine parallel zur Axe geschliffene, quadratische $(4,4 \text{ cm})^2 = 19,36 \text{ qcm}$ grosse Bergkrystallplatte speciell gegen eine ebenso grosse und ebenso geformte planparallele Crownglasplatte so abgeschliffen, dass man beim Aufeinanderlegen der beiden Platten mit Leichtigkeit eine in ihrer ganzen Ausdehnung gleichmässig gefärbte Luftschicht erhielt. Hierauf wurde jede Platte in eine Messingfassung *M* (s. Fig. 2, 4 und 5) gekittet, und zwar so, dass die etwa 8 mm dicken Platten auf beiden Seiten der etwas dünneren Fassung ein wenig hervorragen, sodass auch jetzt noch die beiden gegen einander abgeschliffenen Flächen in Berührung gebracht werden können — wenn die acht in der Fassung der Glasplatte angebrachten Schraubenfedern, deren Köpfe *f* in Fig. 2, 3 und 4 sichtbar sind, ausser Thätigkeit gesetzt sind. — Fig. 2 und 4 zeigen uns die äussere Seite der Fassung der Glasplatte. Die Köpfe der Federn sind durch einen Rahmen *R* hindurchgeführt, welcher vermittelt der gegen die Fassung drückenden Schraube *F* schlittenartig gegen dieselbe verschoben werden kann. Hat der Rahmen *R* die Stellung der Fig. 2, so ragen die Enden der Federn auf der inneren Seite der Fassung

über die Glasplatte hervor, wie man es in Fig. 3 angedeutet sieht, wird er dagegen vermittelt der Schraube F nach oben verschoben, sodass er die Lage der Fig. 4 erhält, so fassen die auf dem Rahmen befindlichen keilförmigen Erhöhungen k die benachbarten Köpfe der Federn f , heben dieselben in die Höhe und setzen auf diese Weise die Federn ausser Thätigkeit, indem dann die Enden derselben auf der inneren Seite der Fassung nicht mehr über die Glasplatte hervorragen, sodass man jetzt die Quarzplatte mit der Glasplatte in Berührung bringen kann. Nachdem man die Federn f auf diese Weise ausser Thätigkeit gesetzt hat, legt man die eingefasste Quarzplatte auf die „innere“, in Fig. 4 nicht sichtbare Seite der Glasplatte, sodass die beiden Platten mit ihren ähnlichen Fassungen in übereinstimmender Stellung übereinander liegen. Waren beide vorher sorgfältig gereinigt, so erhält man auch jetzt mit Leichtigkeit eine vollkommen gleichmässig gefärbte Luftschicht, da die Platten trotz des Einkittens in die Messingfassungen ihre vorzüglich ebenen Flächen behalten hatten. Hierauf werden die an den vier Ecken der Glasplattenfassung angebrachten Scharnire n (s. Fig. 4), welche die Schrauben s tragen, in die Höhe gehoben und durch die vier Schrauben s die beiden Platten mit schwachem Druck zusammengehalten. Wird hierauf der Rahmen R wieder in seine in der Fig. 2 angegebene Stellung gebracht, so sind die Federn f in Thätigkeit und haben das Bestreben, die beiden Platten möglichst voneinander zu entfernen, während dieselben von den vier Schrauben s zusammengehalten werden. Hierdurch ist es ermöglicht, der Luftschicht auch bei verticaler Stellung der Platten durch Verstellen der vier Schrauben s jede gewünschte Dicke zu ertheilen, indem die Luftschicht wegen der Federn f jedesmal die grösste von den Schrauben s gestattete Dicke annimmt. Die Symmetrie der Lage der Federn f trägt wohl dazu bei, dass zugleich auf diese Weise die Dicke der Luftschicht, wie wir sehen werden, sehr gleichmässig gemacht werden kann.

Die Totalansicht des Schraubenapparates (Fig. 2) und der verticale Durchschnitt (Fig. 3) zeigen, wie die beiden in der beschriebenen Weise zusammengehaltenen Platten über

dem Spectrometertischchen angebracht werden. Die Kreisscheibe T wird auf das Tischchen gesetzt und mittelst der beiden Schrauben t an demselben befestigt. Sie trägt ein Ansatzstück A , in welchem eine Schraubenspindel P sich drehen lässt. In der Fassung der Quarzplatte befanden sich zwei Oeffnungen (a, b Fig. 5) mit Gewinden; diente die eine als Schraubenmutter, so war die optische Axe des Krystalls horizontal; diente die andere Oeffnung als Schraubenmutter, so war sie vertical, stand also senkrecht zur Einfallsebene. Das Ansatzstück A war so angebracht, dass die Luftschicht zwischen den beiden Platten über der Axe des Spectrometers zu stehen kam.

Das von mir benutzte Spectrometer — ein alter, sehr schöner Apparat von Pistor und Martins — gestattete eine horizontale Verschiebung des Tischchens von je 1 cm in zwei zu einander senkrechten Richtungen, deren eine der Ebene der Platten parallel war; dies war ein grosser Vortheil für meine Versuche, indem ich auf solche Weise die Möglichkeit hatte, auch bei dickeren Luftschichten, wo die Newton'schen Farben nicht mehr zu erkennen sind, und überhaupt viel genauer, als es mittelst der Newton'schen Farben möglich ist, die Gleichmässigkeit der Luftschicht zu prüfen, resp. durch Verstellen der Schrauben s zu verbessern. Betrachte ich nämlich die von der Luftschicht herrührenden Interferenzstreifen im parallel der Einfallsebene polarisirten Licht und verschiebe dabei die Luftschicht in ihrer eigenen Ebene, so werden die Interferenzstreifen nur in dem Fall ihre Lage im Spectrum unverändert beibehalten, dass die Luftschicht an allen bei der Verschiebung nach und nach beobachteten Stellen die gleiche Dicke hat, dagegen bewirkt auch die kleinste Ungleichmässigkeit der Dicke der Luftschicht eine Verschiebung der Interferenzstreifen; sie bleiben dabei parallel den Fraunhofer'schen Linien, wenn die Luftschicht nur in horizontaler Richtung ungleichmässig dick ist, während eine Ungleichmässigkeit in verticaler Richtung eine Neigung oder Krümmung der Streifen hervorruft. So kann man sofort die Gestalt der Luftschicht beurtheilen und weiss, welche der vier Schrauben s , und wie man sie zu ver-

stellen hat, um die Dicke der Luftschicht gleichmässiger zu machen. Auf diese Weise kann man die Luftschicht viel gleichmässiger machen, als mit Hülfe des Kriteriums der überall gleichen Newton'schen Farbe; sehr häufig erschien die Luftschicht in ihrer ganzen Ausdehnung — mit freiem Auge subjectiv betrachtet — gleichmässig gefärbt, während die Interferenzstreifen bei einer Verschiebung der Platten merklich wanderten. Bei einiger Ausdauer gelingt es indessen, durch Verstellen der vier Schrauben *s* dies Wandern zu vermeiden oder auf ein Minimum zu beschränken und auf diese Weise die Luftschicht in einer Ausdehnung von etwa 1 qcm vollkommen gleichmässig dick zu machen.

Die Möglichkeit der Verschiebung des Spectrometertischchens war ein Ersatz für einen empfindlichen Mangel, der leider einem solchen Schraubenapparat im Gegensatz zur einfachen Kittbefestigung anhaftet, und der in der grossen Empfindlichkeit für Temperatureinflüsse besteht. Wir sahen aus Tabelle I, wie bei einer solchen Kittbefestigung die Luftschicht während mehrerer Wochen eine nahezu constante Dicke behielt, trotzdem bei jenen Versuchen keine irgendwie bedeutenden Schutzmaassregeln gegen Temperatureinflüsse getroffen worden waren. Beim Schraubenapparat kann sich die Dicke der Luftschicht schon während weniger Minuten sehr bedeutend ändern, wenn nicht sorgfältige Vorkehrungen gegen Temperatureinflüsse getroffen sind, wenn vor allem nicht jede Spur von strahlender Wärme abgehalten wird. Aber selbst bei grösster Vorsicht ist es nicht immer möglich, Temperaturschwankungen völlig zu vermeiden; so zeigt sich z. B. an heissen, wolkenlosen Sommertagen, die andererseits gerade am günstigsten für diese Versuche sind, fast immer mit dem Ansteigen der Temperatur während des Tages ein Dickerwerden der Luftschicht.

Ich werde bei Besprechung der Resultate der einzelnen Versuche auf diese Temperatureinflüsse zurückkommen. Es wird sich zeigen, dass der beschriebene Schraubenapparat besonders gut zu Messungen der Phasendifferenzen sich eignet, wobei die Temperaturänderungen nur wenig in Betracht kommen und auf einfache Weise eliminirt werden können.

2. Bestimmung der Richtung der optischen Axe.
 — Da ich die Quarzplatte eingefasst und ohne Angabe der Richtung der optischen Axe in der geschliffenen Fläche aus der mechanischen Werkstatt erhalten hatte, so musste ich diese Richtung auf optischem Wege bestimmen.

Hierzu brachte ich die Platte zunächst zwischen zwei gekreuzte Nicol'sche Prismen und erhielt aus der Lage der Platte, bei welcher keine Depolarisation eintritt, die beiden aufeinander senkrechten Richtungen, von denen die eine die Richtung der optischen Axe ist. Eine dieser Richtungen wurde auf der Fassung der Quarzplatte markirt. Um zu entscheiden, welche der zwei zu einander senkrechten Richtungen die Richtung der Axe ist, bestimmte ich am Spectrometer den Winkel, welchen die beiden Ebenen der schwach prismatischen Quarzplatte bilden, und die Lage der Kante des Prismas und wusste somit, an welcher Seite die Platte dicker, und an welcher Seite sie dünner war. Die Richtung senkrecht zur Prismenkante wurde auf der Fassung markirt, und zwar als Pfeil, welcher nach der dünnen Seite der Quarzplatte hinweist (s. Fig. 5). Hierauf untersuchte ich die Quarzplatte in einem mikroskopischen Polarisationsapparat, welcher das auf die Platte fallende Licht sehr convergent machte. Bei Anwendung von homogenem Na-Licht zeigte die etwa 8 mm dicke Platte zwei Hyperbelsysteme, deren aufeinander senkrechte Axen der Richtung der optischen Axe und der ihr senkrechten Richtung entsprachen. Der von den beiden Ebenen der Quarzplatte eingeschlossene Winkel betrug $10'20''$, die Ausdehnung der Platte in der Richtung senkrecht zur Prismenkante 55 mm, somit der Unterschied der Dicke an den beiden Enden der Platte in dieser Richtung: $55 \cdot \sin. 10'20'' = 55 \cdot 0,003 = 0,165$ mm. Einem Gangunterschied der zwei den Quarz in normaler Richtung durchsetzenden Strahlen von einer halben Wellenlänge entspricht eine Dicke von 0,03237 mm; bei Verschiebung der Platte im Polarisationsapparat in Richtung senkrecht zur Prismenkante musste somit die Mitte des Gesichtsfeldes die Intensität wechseln; war die Mitte anfangs gelb, so wurde sie allmählich schwarz, dann wieder gelb u. s. f.,

d. h. sie wechselte fünfmal die Intensität, weil der Dickenunterschied von 0,165 mm einer Aenderung der Phasendifferenz der beiden Strahlen von ungefähr fünf halben Wellenlängen entspricht.

Dabei näherten sich die Hyperbeln des einen Systems der Mitte des Gesichtsfeldes und den Asymptoten, in welchen sie schliesslich verschwanden, während die Hyperbeln des anderen Systems sich von der Mitte und den Asymptoten entfernten, und von den Asymptoten her immer neue Hyperbeln dieses Systems auftraten.

Wenn ich die Platte so verschiebe, dass zuerst die dicken, dann die dünnen Stellen untersucht werden, so ist die optische Axe der Axe jenes Systems parallel, dessen Hyperbeln sich der Mitte nähern; denn in ihrer Richtung nimmt der Gangunterschied der interferirenden Strahlen bei wachsender Entfernung von der Mitte des Gesichtsfeldes ab. — Auf diese Weise ergab sich, dass die auf der Fassung markirte Richtung die Richtung senkrecht zur optischen Axe ist.

3. Beobachtungen unter beliebigen Einfallswinkeln. — Zunächst habe ich zwei Versuche (Tabelle II und III) bei *parallel zur Einfallsebene polarisirtem Licht* gemacht, um nachzuweisen, dass bei der Reflexion an Quarz unter beliebigen Einfallswinkeln, ebenso wie bei der Reflexion an isotropen durchsichtigen Medien, die parallel zur Einfallsebene polarisirte Componente keine Phasenänderung erleidet. Bei dem einen Versuch stand die optische Axe des Quarzes senkrecht, beim anderen parallel zur Einfallsebene. Ich konnte hierbei wieder die Anordnung der Apparate, wie sie in der Fig. 1 dargestellt ist, anwenden. Die Spaltbreite des ersten Collimators C_1 betrug 4', resp. 5'. Aber selbst ein Fehler von $\pm 2\frac{1}{2}'$ in der Bestimmung des Einfallswinkels würde die nach der Formel:

$$d = \frac{m \cdot \lambda}{2 \cdot \cos \alpha}$$

berechnete Dicke der Luftschicht bei Einfallswinkeln von 40—65° nur um 0,0₃6—0,0₂16 des Gesamtbetrages verändern — Grössen, welche nicht in Betracht kommen.

Zur Bestimmung der Einfallswinkel wurde zunächst ohne dazwischenstehende Platten die Gegenüberstellung von Collimator- und Fernrohr abgelesen, alsdann der Schraubenapparat an das Ansatzstück über dem Spectrometertischchen angeschraubt, die senkrecht zur optischen Axe der Quarzplatte stehende Marke an der Fassung derselben horizontal, resp. vertical gestellt und hierauf die planparallele Glasplatte und mit ihr die vordere Fläche der schwach prismatischen Quarzplatte durch Fadenkreuzspiegelung und durch Verstellen der unter dem Spectrometertischchen dazu vorhandenen Schrauben parallel zur Umdrehungsaxe des Spectrometers, also vertical gestellt. Die zweite Einstellung zur Bestimmung des Einfallswinkels geschah durch Einstellen des Spectrometerfernrohres S auf die Mitte des von der planparallelen Glasplatte gespiegelten Spaltes, weil dies die schnellste Einstellung ist. Hierauf wurde das Spectrometerfernrohr S zur Seite gedreht, das zweite Collimatorrohr C_2 und das Beobachtungsfernrohr F mit Prismensystem für gerade Durchsicht an seine Stelle gebracht (s. Fig. 1), und mit der Messung der Interferenzstreifen begonnen. Nach beendigter Messung wurde zur Controle nochmals das Spectrometerfernrohr S auf die Mitte des von der planparallelen Glasplatte reflectirten Spaltes eingestellt.

Zu Anfang eines jeden der beiden Versuche war die Luftschicht zwischen den Platten möglichst gleichmässig gemacht worden durch horizontales Verschieben derselben in ihrer eigenen Ebene und durch Verstellen der Schrauben s (s. Fig. 2, 3, 4), bis die Interferenzstreifen bei einer solchen Verschiebung der Platten nicht mehr oder nur ganz unbedeutend ihre Lage im Spectrum veränderten. Hierauf wurden während eines jeden Versuchs die Schrauben s nicht mehr berührt, also die Dicke der Luftschicht — bis auf Temperatureinflüsse — unverändert gelassen. Man darf daher alle Zahlen d , welche in der Tabelle II, resp. III angegeben sind, untereinander vergleichen. Doch wird man es begreiflich finden, dass die Zahlen d , welche an einem Tage beobachtet sind, besser untereinander übereinstimmen, als sie es mit an anderen Tagen gefundenen thun. Dass die vorkom-

menden geringen Verschiedenheiten der Zahlen d nicht auf Phasenänderungen beruhen, sieht man schon daraus, dass die absichtlich wiederholten Messungen unter einem schon früher untersuchten Einfallswinkel dieselben Abweichungen gegen die früher unter diesem Einfallswinkel gefundenen Zahlen zeigen, wie die Zahlen verschiedener Einfallswinkel. Die Verschiedenheiten der Zahlen d sind, sofern sie nicht in Beobachtungsfehlern ihren Grund haben, die Folge von wirklichen Veränderungen der Dicke und Form der Luftschicht, welche durch Temperaturänderungen oder durch eine elastische Nachwirkung der Federn f hervorgerufen werden.

So scheint die grösste Abweichung, die der Zahlen d vom 14. Februar gegen die Zahlen der folgenden Tage, die Folge einer Nachwirkung der Federn f gewesen zu sein, welche am ersten Tage, an welchem die Schrauben s eingestellt worden waren, noch nicht zur vollen Geltung gekommen sein mögen. Denn die Luftschicht war am folgenden Tage dicker, trotzdem die Zimmertemperatur um $1,7^{\circ}$ C. gefallen war. Dass aber die Dicke der Luftschicht zwischen den Platten unter dem blossen Einfluss der Temperatur zugleich mit der Temperatur wächst und abnimmt, tritt in den späteren Versuchen, welche ich im Sommer bei weit höherer Temperatur angestellt habe, deutlich hervor und zeigt sich ebenso in den Zahlen vom 17. Februar, welche ich erhalten habe, nachdem ich durch Oeffnen der Luftheizungsklappe die Temperatur absichtlich erhöht hatte. Doch kann man die Temperatur nicht einfach in Rechnung bringen, weil die Verhältnisse der Messingfassung und der glatten Oberflächen der eingefassten Platten zu complicirt sind, und man nicht annehmen kann, dass alle Theile des Schraubenapparates zu gleicher Zeit und sofort die Temperatur der den Apparat umgebenden Luft annehmen, welche in den Tabellen angegeben ist; ferner machen die Temperaturänderungen die Luftschicht nicht einfach dicker oder dünner, sondern verändern in unregelmässiger Weise ihre Form, indem sie auf die einzelnen Schrauben und Federn in unregelmässiger Weise einwirken, wodurch die Luftschicht gewöhnlich un-

gleichmässiger wird. Es bleibt daher nur übrig, die Temperatur während des Versuchs möglichst constant zu erhalten und die Messungen möglichst schnell auszuführen, um eine grössere Anzahl Zahlen in verhältnissmässig kurzer Zeit zur Vergleichung zu erhalten. Die angegebenen Wellenlängen sind daher das Mittel aus nur drei, übrigens gut übereinstimmenden Mikrometereinstellungen. Sie sind in beiden Tabellen in der Reihenfolge angegeben, in welcher sie gemessen worden sind. Die mit * bezeichneten Zahlen sind nur geschätzt.

Tabelle II.

Luftschicht zwischen Glas und Quarz im parallel der Einfallsebene polarisirten Licht.

Optische Axe senkrecht zur Einfallsebene.

| Datum | α | m | λ | d | Temp. | Datum | α | m | λ | d | Temp. | | | |
|--------------------|----------|-----|-----------|-------|----------|----------------|----------|-------|-----------|--------------------|----------|-------|------|------|
| 14. 2. 87. 53° 56' | | 8 | 655,7 | 4456 | 16,8° C. | 16. 2. 87. 57° | | 8 | 621,3 | 4563 | 16,8° C. | | | |
| | | 9 | 584,4 | 4467 | | | | 9 | 553,3 | 4572 | | | | |
| | | 10 | 526,7 | 4473 | | | | 10 | 497,7 | 4569 | | | | |
| | | 11 | 479,0 | 4475 | | | | 11 | 452,4 | 4568 | | | | |
| | | 12 | 438,7° | 4471° | | | | 12 | 414,6° | 4568* | | | | |
| | | 12 | 572,8° | 4487° | | | | 7 | 653,3 | 4573 | | | | |
| | | 14 | 490,9° | 4486° | | | | 8 | 572,8 | 4582 | | | | |
| 15. 2. | 40° | | | | 16,7 | 60 | | 9 | 503,5 | 4585 | 16 | | | |
| | | | | | | | 10 | 458,4 | 4584 | | | | | |
| | | | | | | | 11 | 416,6 | 4583 | | | | | |
| | | | | | | | 65 | 6 | 646,0 | 4586 | | | | |
| | | | | | | | | 7 | 555,1 | 4598 | | | | |
| | | | | | | | | 8 | 484,9° | 4589° | | | | |
| | | | | | | | | 9 | 582,7 | 4571 | | | | |
| | | | | | | | | 10 | 524,4 | 4571 | | | | |
| | | | | | | | | 11 | 477,0 | 4574 | | | | |
| | | | | | | | | 12 | 432,6 | 4567 | | | | |
| | | | | | | | | 12 | 469,1 | 4571 | | | | |
| | | 55 | 8 | 649,5 | | | 4529 | 16,4 | 52 | 11 | | 511,4 | 4568 | 15,8 |
| | | | 9 | 578,0 | | | 4535 | | | 10 | | 562,4 | 4567 | |
| | | | 10 | 520,7 | | | 4539 | | | 9 | | 624,4 | 4564 | |
| 11 | 473,3 | | 4538 | | | | | | | | | | | |
| 12 | 433,9 | | 4539 | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| 16. 2. | 55 | 8 | 653,0 | 4554 | 16,2 | 17. 2. 52 | 9 | 629,4 | 4600 | 20,2 ¹⁾ | | | | |
| | | 9 | 581,3 | 4561 | | | 10 | 566,8 | 4603 | | | | | |
| | | 10 | 523,0 | 4559 | | | 11 | 515,3 | 4603 | | | | | |
| | | 11 | 475,9 | 4563 | | | 12 | 472,7 | 4606 | | | | | |
| | | | | | | | 13 | 436,4 | 4607 | | | | | |
| | | | | | | 10 | 568,3 | 4615 | 21 | | | | | |

1) Bei offener Luftheizungsklappe.

Tabelle III.

Luftschicht zwischen Glas und Quarz im parallel zur Einfallsebene polarisirten Licht.

Optische Axe parallel der Einfallsebene.

| Datum | α | m | l | d | Temp. | Datum | α | m | l | d | Temp. |
|------------|----------|-----|-------|------|-------|------------|----------|-----|-------|------|-------|
| 11. 3. 87. | 54° | 10 | 674,0 | 5733 | 18°C. | 13. 3. 87. | 50° | 11 | 665,3 | 5693 | 19°C. |
| | | 11 | 614,7 | 5752 | | | | 12 | 611,2 | 5705 | |
| | | 12 | 563,3 | 5750 | | | | 13 | 564,1 | 5704 | |
| | | 13 | 519,9 | 5749 | | | | 14 | 523,3 | 5699 | |
| | | 14 | 482,8 | 5750 | | | | 15 | 488,3 | 5697 | |
| | | 15 | 450,6 | 5749 | | | | 16 | 457,5 | 5694 | |
| | | 16 | 422,4 | 5749 | | | | 17 | 430,3 | 5690 | |
| | 57 | 13 | 415,5 | 5722 | 20 | | 40 | 13 | 670,6 | 5690 | 20 |
| | | 14 | 445,7 | 5729 | | | | 14 | 623,4 | 5697 | |
| | | 13 | 480,0 | 5729 | | | | 15 | 582,3 | 5701 | |
| | | 12 | 519,6 | 5725 | | | | | | | |
| | | 11 | 567,6 | 5732 | | | | 15 | 583,5 | 5713 | 20,4 |
| | | 10 | 623,2 | 5722 | 19,6 | | | 16 | 547,9 | 5722 | |
| | 59 | 10 | 589,1 | 5719 | | | | 17 | 514,3 | 5707 | |
| | | 11 | 536,1 | 5725 | | | | 18 | 486,0 | 5710 | |
| | | 12 | 490,7 | 5717 | | | | 19 | 460,7 | 5714 | |
| | | 13 | 453,2 | 5720 | 20 | | | 20 | 437,6 | 5713 | |
| | 50 | 12 | 612,3 | 5715 | 20,6 | | | 21 | 416,7 | 5712 | |
| | | 13 | 565,8 | 5721 | | | | | | | |
| | | 14 | 525,6 | 5724 | | | | | | | |
| | | 15 | 490,5 | 5723 | | | | | | | |

Ausser der directen Wirkung von Temperaturänderungen und elastischer Nachwirkung müssen die Beobachtungsfehler erwähnt werden, welche daraus entstanden, dass nicht immer ganz dieselbe Stelle der Luftschicht und hierdurch, nachdem die Luftschicht durch Temperatureinflüsse und elastische Nachwirkung etwas ungleichmässig geworden war, verschiedenen dicke Stellen der Luftschicht zur Untersuchung kamen. So zeigt sich z. B. an den Zahlen des 16. Februar das Folgende: das Sonnenbildchen auf der Linse des ersten Collimators C_1 wurde immer genau auf derselben Stelle erhalten; würden die Strahlen in gerader Linie bis zur Luftschicht gelangen, so würden sie also stets dieselbe Stelle der Luftschicht treffen; da sie aber bei verschiedenen Einfallswinkeln verschieden starke Ablenkung in der planparallelen Glasplatte erleiden, so geschieht dies nicht. Bei grösseren Einfallswinkeln ($\alpha = 65^\circ$) wurden dickere Stellen getroffen, als

bei kleineren. Daher der Verlauf der Zahlen d am 16. Februar. — Beim Einfallswinkel $\alpha = 40^\circ$ am 15. Februar war dieser Fehler durch eine kleine Verschiebung des Tischchens compensirt worden. — Die hieraus entstandenen Abweichungen verdecken in den Tabellen II und III meistens die Richtung der Temperatureinflüsse. Bei den späteren, in Tabelle IV, V und VI mitgetheilten Versuchen fallen die von der Ablenkung in der planparallelen Glasplatte herrührenden Fehler fort, weil dort die Einfallswinkel nur wenig verändert wurden.

4. Beobachtungen in der Nähe des Haupteinfallswinkels. — Bei den bisher mitgetheilten Versuchen konnte die in Fig. 1 dargestellte Anordnung der Apparate angewandt werden, da es sich in diesen Versuchen nur um qualitative Untersuchungen handelte. Will man aber die in der Nähe des Haupteinfallswinkels erhaltenen Zahlen zu Messungen der absoluten Phasenänderungen der senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Componente (Phasendifferenzen der beiden Componenten) verwenden und hieraus den Haupteinfallswinkel berechnen, so ist eine vollkommen genaue Bestimmung des Einfallswinkels unbedingt nothwendig, da bekanntlich die Phasendifferenzen äusserst schnell sich mit dem Einfallswinkel ändern. Ich habe deshalb bei allen folgenden Versuchen das zweite Collimatorrohr C_2 beseitigt (s. Fig. 6) und das Beobachtungsfernrohr F auf den schmalen Collimatorspalt s_1 eingestellt, welcher so breit war, dass er gerade noch deutliche Fraunhofer'sche Linien lieferte. Die Einfallswinkel wurden in ähnlicher Weise wie für Tabelle II und III vermittelst des Spectrometerfernrohrs S gemessen. Sie sind bis auf $\pm 30''$ genau. Das Spectrometer erlaubte zwar, die Einfallswinkel noch viel genauer zu messen, allein es kam darauf an, möglichst schnell zu beobachten, um eine möglichst grosse Anzahl Zahlen zur Vergleichung zu erhalten. Daher wurde auch nur an einem der beiden mit dem Spectrometerfernrohr S fest verbundenen Mikroskope m abgelesen, sodass die Excentricität des Spectrometers beim möglichen Fehler in Rechnung gezogen werden musste.

Die Tabellen IV und V geben die bei verschiedenen

Einfallswinkeln α gemessenen Wellenlängen, λ^{\parallel} und λ^{\perp} , der Interferenzstreifen im parallel und senkrecht polarisirten Licht (Columnne 3 und 4), und die aus denselben nach der Formel:

$$d = \frac{m \cdot \lambda}{2 \cdot \cos. \alpha}$$

berechneten Grössen d^{\parallel} und d^{\perp} (Columnne 5 und 6) in Milliontelmillimetern. Columnne 7 gibt die Zimmertemperatur t in Celsiusgraden an. *Es dürfen in diesen Tabellen nur die Zahlen d^{\parallel} und d^{\perp} , welche an einem und demselben Tage beobachtet worden sind, verglichen werden*, da zwischen den einzelnen Beobachtungstagen die Schrauben s (Fig. 2, 3, 4) verstellt und somit die Dicke der Luftschicht verändert worden war. Die Wellenlängen λ^{\parallel} sind das Mittel aus drei Einstellungen, die Wellenlängen λ^{\perp} im allgemeinen das Mittel aus fünf Einstellungen des Ocularmikrometers M . Die Zahlen λ^{\parallel} und d^{\parallel} sind innerhalb eines jeden Beobachtungstages in der Reihenfolge angegeben, in welcher sie gemessen worden sind.

Tabelle IV.

Luftschicht zwischen Glas und Quarz.
Optische Axe senkrecht zur Einfallsebene.

| α | m | λ^{\parallel} | λ^{\perp} | d^{\parallel} | d^{\perp} | t | α | m | λ^{\parallel} | λ^{\perp} | d^{\parallel} | d^{\perp} | t |
|------------|-----|-----------------------|-------------------|-----------------|-------------|-------|----------|-----|-----------------------|-------------------|-----------------|-------------|--------|
| 1) 56° — | 12 | 517,9 | 519,6 | 5557 | 5575 | 24,2° | 57° 15' | 12 | 521,4 | 563,6 | 5783 | 6251 | 25° 3) |
| | 13 | 478,4 | 479,9 | 5561 | 5578 | | | 13 | 481,9 | 513,4 | 5790 | 6169 | |
| 56 15 | 12 | 515,0 | 517,7 | 5562 | 5591 | | | 11 | 570,1 | | 5796 | | 26,2 |
| | 13 | 476,2 | 478,1 | 5571 | 5593 | | 57 30 | 11 | 568,0 | | 5814 | | |
| 56 30 | 12 | 512,9 | 516,1 | 5576 | 5610 | | | 12 | 520,0 | 564,6 | 5807 | 6305 | |
| | 13 | 473,7 | 477,2 | 5579 | 5620 | 25,4 | | 13 | 480,4 | 516,9 | 5812 | 6253 | |
| 2) 56° 45' | 8 | 462,6 | 478,8 | 3375 | 3493 | 23° | 57 45 | 12 | 516,2 | 562,8 | 5804 | 6328 | 26,9 |
| | 7 | 529,6 | 548,3 | 3380 | 3500 | | | 13 | 477,0 | 514,5 | 5810 | 6267 | |
| 56 50 | 8 | 462,8 | 482,8 | 3384 | 3530 | 23,4 | | 11 | 564,0 | | 5818 | | |
| | 7 | 528,8 | 559,5 | 3383 | 3579 | | 57 — | 13 | 486,1 | 506,1 | 5801 | 6040 | 27,2 |
| 56 55 | 7 | 528,9 | 565,7 | 3391 | 3627 | 23,7 | | 12 | 526,6 | | 5801 | | |
| | 8 | 463,7 | 491,7 | 3398 | 3603 | | | 11 | 575,4 | | 5811 | | |
| 57 — | 7 | 528,3 | 573,8 | 3395 | 3687 | 24,4 | | | | | | | |
| | 8 | 462,4 | 491,8 | 3396 | 3612 | | | | | | | | |

1) am 22. 7. 87, 2) am 25. 6, 3) am 14. 7 beobachtet.

Tabelle V.

Luftschicht zwischen Glas und Quarz.
Optische Axe parallel der Einfallsebene.

| α | m | $\lambda \parallel$ | $\lambda \perp$ | $d \parallel$ | $d \perp$ | t | α | m | $\lambda \parallel$ | $\lambda \perp$ | $d \parallel$ | $d \perp$ | t |
|------------|-----|---------------------|-----------------|---------------|-----------|-----|----------|---------------|---------------------|-----------------|---------------|-----------|-----|
| 1) 56° 50' | | 7 559,4 591,8 | | 3579 3786 | 22,2° | | 56° 45' | 9 542,9 555,6 | | 4456 4560 | 24,1° | 2) | |
| | | 8 489,4 508,9 | | 3578 3721 | | | | 10 489,1 | | 4460 | | | |
| 56 55 | | 7 560,7 598,3 | | 3595 3836 | 22,6 | | | 10 | 499,4 | 4554 | | | |
| | | 8 490,8 516,3 | | 3597 3783 | 23 | | | 10 489,6 | | 4465 | 24,5 | | |
| 57 — | | 7 561,3 601,3 | | 3607 3864 | | | 57 — | 9 543,9 573,1 | | 4494 4735 | 25 | | |
| | | 8 492,1 519,7 | | 3614 3817 | | | | 10 489,4 | | 4493 | | | |
| 57 5 | | 8 492,4 521,4 | | 3625 3838 | | | | 10 | 510,4 | 4686 | | | |
| | | 7 564,0 605,9 | | 3632 3902 | 23,5 | | | 10 489,9 | | 4497 | | | |
| 57 10 | | 7 564,4 609,4 | | 3643 3934 | | | | | | | | | |
| | | 8 492,9 525,3 | | 3636 3875 | 23,6 | | 57° 20' | 12 527,0 | 559,7 5858 | 6222 27,5° | 4) | | |
| 2) 57° — | | 10 438,5 458,5 | | 4026 4209 | 22° | | | 13 486,3 | 510,2 5856 | 6144 | | | |
| | | 9 487,7 512,2 | | 4030 4232 | | | 57 40 | 12 527,7 | 574,5 5920 | 6445 28,7 | | | |
| | | 8 549,5 | | 4036 | | | | 13 | 524,7 | 6377 | | | |
| | | 8 | 583,4 | 4285 | | | | 11 576,8 | 5931 | | | | |
| | | 8 550,7 | | 4045 | | | 58 — | 12 523,7 | 570,9 5930 | 6464 29,1 | | | |
| 56 30 | | 8 559,5 566,0 | | 4055 4102 | 22,9 | | | 13 | 522,0 | 6403 | | | |
| | | 9 497,7 501,3 | | 4058 4087 | | | | 11 572,5 | 5942 | | | | |
| | | 10 448,1 452,2* | | 4059 4096 | | | | | | | | | |

Man ersieht aus diesen beiden Tabellen, dass das parallel der Einfallsebene polarisirte Licht auch in der Nähe des Haupteinfallswinkels ohne Phasenänderung reflectirt wird, und dass die mit dem Babinet'schen Compensator beobachteten Phasendifferenzen nur von einer Phasenänderung der senkrecht polarisirten Componente herrühren. — Solange das Nicol'sche Prisma nur eine Spur von parallel polarisirtem Licht durchliess, hatten die Interferenzstreifen die ihnen in diesem Lichte zukommende Lage im Spectrum, und erst im Augenblick, wo das Nicol die Stellung einnimmt, in welcher es nur senkrecht polarisirtes Licht hindurch lässt, tritt ein plötzliches Ueberspringen der Streifen in ihre neue Lage ein, was einen sehr interessanten Anblick gewährt.

Das von der vorderen Glasfläche und von der hinteren Quarzfläche reflectirte Licht wurde durch den Schirm r (s. Fig. 6) abgeblendet, dessen verticaler Spalt etwa 1 mm breit war; trotzdem waren die Interferenzstreifen bei gleichmässiger Luftschicht in beiden Lichtarten vollkommen schwarz, und konnte dies als nothwendiges Kriterium für

1) am 27. 6.; 2) am 29. 6.; 3) am 4. 7.; 4) am 29. 7. beob.

die Gültigkeit der Versuche dienen: die Luftschicht musste mindestens so gleichmässig sein, dass die Streifen vollkommen schwarz erschienen. Die Interferenzen im senkrecht polarisirten Licht hatten gewöhnlich die Form von schwarzen Flecken, da der obere und untere Theil des Gesichtsfeldes noch von parallel polarisirtem Licht erleuchtet wurde.

Das geringe Wachsen der Zahlen d'' — hauptsächlich in der Tab. V — ist offenbar die Folge des im Laufe des Tags eintretenden Temperaturanstieges, welcher sich gerade an völlig wolkenlosen und daher heissen Sommertagen am schwierigsten vermeiden lässt. In Tab. VI theile ich einen Versuch vom 30. Juli 1887 mit, bei welchem die optische Axe parallel der Einfallsebene war, und bei welchem ich nur die Interferenzstreifen im parallel polarisirten Licht gemessen habe. Dieser Versuch zeigt freilich auch ein allmähliches Ansteigen der Zahlen d'' , doch kann er trotzdem als Ergänzung der Tab. V dienen, wenn man z. B. in der letzteren die Zahlen vom 29. Juni und vom 29. Juli mit den Zahlen der entsprechenden Einfallswinkel in der Tab. VI vergleicht. Bei diesem Versuch wurden die Streifen während des Tags etwas geneigt gegen die Fraunhofer'schen Linien, dafür blieb aber die Luftschicht in horizontaler Richtung recht gleichmässig; und es wurde genau darauf geachtet, dass immer dieselbe Stelle der Luftschicht untersucht wurde.

Tabelle VI.

Luftschicht zwischen Glas und Quarz im parallel zur Einfallsebene polarisirten Licht.

Optische Axe parallel der Einfallsebene.

| α | m | λ'' | d'' | t | α | m | λ'' | d'' | t |
|----------|-----|-------------|-------|-------|----------|-----|-------------|-------|-----|
| 56° 30' | 10 | 642,2 | 5818 | 28,5° | 56° 45' | 10 | 641,5 | 5850 | |
| | 11 | 583,7 | 5816 | | | 11 | 582,5 | 5843 | |
| | 12 | 534,6 | 5812 | | | 12 | 534,0 | 5844 | |
| | 13 | 493,4 | 5811 | | | 13 | 492,7 | 5841 | |
| | 14 | 459,1 | 5823 | | | 14 | 458,1 | 5849 | |
| | 15 | 428,6 | 5824 | | | 15 | 427,5 | 5848 | |
| | 16 | 402,0 | 5827 | | | 16 | 400,6 | 5845 | |

| α | m | $\lambda \parallel$ | $d \parallel$ | t | α | m | $\lambda \parallel$ | $d \parallel$ | t |
|----------|-----|---------------------|---------------|-------|----------|-----|---------------------|---------------|------|
| 57° —' | 10 | 639,4 | 5870 | 29,2° | 57° 30' | 10 | 634,2 | 5902 | 30° |
| | 11 | 581,6 | 5873 | | | 11 | 576,5 | 5901 | |
| | 12 | 532,8 | 5870 | | | 12 | 527,4 | 5889 | |
| | 13 | 491,8 | 5869 | | | 13 | 487,2 | 5894 | |
| | 14 | 457,8 | 5884 | | | 14 | 452,6 | 5897 | |
| | 15 | 427,1 | 5881 | | | | | | |
| 57 15' | 16 | 400,5 | 5883 | 57 45 | 57 45 | 10 | 630,3 | 5906 | 30,2 |
| | 10 | 637,5 | 5892 | | | 11 | 573,7 | 5913 | |
| | 11 | 579,0 | 5887 | | | 12 | 525,1 | 5904 | |
| | 12 | 530,9 | 5888 | | | 13 | 484,7 | 5904 | |
| | 13 | 490,1 | 5889 | | | 14 | 450,7 | 5912 | |
| | 14 | 455,4 | 5893 | | | | | | |
| | 15 | 424,8 | 5889 | | | | | | |

5. Phasendifferenzen. — Aus den in den Tabellen IV und V mitgetheilten, sowie aus meinen übrigen Messungen, habe ich die Phasenänderungen der senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Componente bei der Reflexion in Luft an Quarz + derjenigen in Luft an Glas berechnet. Die interferirenden Wellenlängen im senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Licht genügen der Gleichung:

$$2d \cdot \cos. \alpha + A - A' + D_1 + D_2 = m \cdot \lambda^\perp,$$

wo in unserem Specialfalle A , A' , D_1 und D_2 die Phasenverzögerungen bei der Reflexion in Luft an Quarz, in Glas an Luft und bei der Brechung in der die Luftschicht begrenzenden Glasfläche bedeuten. Bezeichnen wir mit A_1 die Phasenverzögerung bei der Reflexion in Luft an Glas unter dem Einfallswinkel α , und machen wir die Annahme:

$$A' = -A_1; \quad D_1 + D_2 = 0,$$

d. h. die Annahme, dass bei innerer und äusserer Reflexion am Glase unter den entsprechenden Einfallswinkeln die senkrecht polarisirte Componente entgegengesetzt gleiche Phasenänderungen, und dass sie bei der Brechung im Glase keine Phasenänderungen erleidet, so geht die obige Gleichung für die Interferenzstreifen im senkrecht polarisirten Licht über in die Gleichung:

$$2d \cdot \cos. \alpha + A + A_1 = m \cdot \lambda^\perp,$$

und man erhält zur Berechnung der Summe $A + A_1$:

$$A + A_1 = m \cdot \lambda^\perp - 2d \cdot \cos. \alpha.$$

In dieser Gleichung sind m , λ^\perp , α die bekannten zusammen gehörenden Grössen, wie sie in allen bisherigen Tabellen stets in gleicher Weise bezeichnet worden sind; d dagegen ist die wirkliche Dicke der Luftschicht, welche ich immer aus dem unmittelbar vor oder nach dem betreffenden λ^\perp gemessenen λ^\parallel nach der Formel:

$$d = \frac{m \cdot \lambda^\parallel}{2 \cdot \cos \alpha}$$

berechnet habe (und nicht etwa als das Mittel aus den verschiedenen Zahlen d^\parallel), um möglichst genau die Dicke zu erhalten, welche die Luftschicht während der Messung des betreffenden λ^\perp gehabt hatte. — Vom 14. Juli an habe ich übrigens bei der Messung der λ^\perp immer das folgende Verfahren eingeschlagen, welches die aus denselben berechneten Phasenänderungen von Aenderungen der Dicke der Luftschicht während der Messung unabhängig macht; ich habe nicht den Abstand des Streifens im senkrecht polarisirten Licht von der benachbarten Fraunhofer'schen Linie, sondern den Abstand desselben vom nächsten Interferenzstreifen im parallel polarisirten Licht mikrometrisch bestimmt, und erhielt hieraus und aus der Lage des betreffenden parallel polarisirten Streifens die Wellenlänge des senkrecht polarisirten Streifens. Aus den beiden zusammen gemessenen Streifen λ^\parallel und λ^\perp wurde die Phasenänderung von λ^\perp berechnet nach der Formel:

$$A + A_1 = m \cdot \lambda^\perp - (m - n) \lambda^\parallel,$$

wo je nach dem Einfallswinkel $n = 0$ oder $n = 1$ war, da natürlich derjenige Interferenzstreifen im parallel polarisirten Licht benutzt wurde, welcher dem senkrecht polarisirten Streifen am nächsten lag. Aenderte sich während der Messung die Dicke der Luftschicht durch Temperatureinflüsse, so wurde hierdurch die Lage der beiden Streifen im Spectrum in gleicher Weise verändert, sodass ihr Abstand ungeändert blieb.

Der Schraubenapparat ist überhaupt mehr zu Messungen der Phasendifferenzen geeignet, als zu der Untersuchung, welche der beiden Componenten eine Phasenänderung erleidet, und

welche nicht; denn bei dieser Untersuchung handelt es sich vor allem darum, eine möglichst grosse Anzahl Zahlen d zur Vergleichung zu erhalten; dies erfordert selbst bei sehr schneller Beobachtung eine Zeit von einiger Dauer, während welcher leicht Aenderungen in der Dicke und Form der Luftschicht eintreten. Dagegen kann man bei der Messung der Phasendifferenzen zur Zeit sich mit der Messung weniger Streifen begnügen, kann diese Messungen um so genauer ausführen und nach Belieben, sobald die Luftschicht nicht mehr ganz gleichmässig ist, durch Verstellen der Schrauben s die vollkommene Gleichmässigkeit derselben wiederherstellen, da es in diesem Falle gar nicht darauf ankommt, dass die Dicke der Luftschicht immer dieselbe bleibt. Hierzu kommt noch der Vortheil, dass man jede halbe Stunde Sonnenschein benutzen kann.

Schliesslich setzt uns der Schraubenapparat in den Stand, die Phasenänderung jeder beliebigen Wellenlänge zu messen, indem man durch Verstellen der Schrauben s der Luftschicht eine solche Dicke geben kann, dass im senkrecht polarisirten Licht ein Streifen in dem gewünschten Theile des Spectrums auftritt. Der Schraubenapparat kann somit dazu dienen, den Haupteinfallswinkel als Function der Wellenlänge zu untersuchen.

Meine Messungen waren zunächst für die Tabellen IV und V bestimmt; die aus ihnen berechneten, in den Tabellen VII und VIII mitgetheilten Phasenänderungen erreichen daher nicht die grösste von der Methode gestattete Genauigkeit. Doch tritt in denselben im grossen und ganzen hervor, dass, wie zu erwarten war, der Haupteinfallswinkel bei abnehmender Wellenlänge grösser wird.

Ich habe in den Tabellen VII und VIII die erhaltenen Resultate zunächst nach den Einfallswinkeln, innerhalb dieser nach den Versuchstagen, und innerhalb der Versuchstage nach steigenden Wellenlängen geordnet; Columnne 3 enthält die Summe der Phasenänderungen der senkrecht polarisirten Componente (Phasendifferenzen der beiden Componenten) bei Reflexion in Luft an Glas und in Luft an Quarz, gemessen durch die Wellenlänge λ^\perp , welche die betreffenden Phasen-

änderungen erleidet. Columne 4 gibt, ohne Rücksicht auf die Wellenlänge, die Mittel aus allen in Columne 3 für den betreffenden Einfallswinkel angegebenen Phasendifferenzen (mit Ausschluss der mit * bezeichneten); Columne 5 gibt die Zimmertemperatur während der Messung in Celsiusgraden an. Der Vollständigkeit wegen habe ich auch die ungenauen Zahlen (welche entweder nur geschätzt sind, oder wo die Luftschicht schon so ungleichmässig geworden war, dass die Streifen nicht mehr ganz schwarz erschienen) mit * bezeichnet beigefügt, sodass in den Tabellen VII und VIII alle während der Zeit vom 25. Juni bis zum 29. Juli 1887 gemessenen Wellenlängen λ^\perp im senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Licht nebst den aus denselben berechneten Phasendifferenzen mitgetheilt sind.

Tabelle VII.

Phasendifferenzen.

Optische Axe des Quarzes senkrecht zur Einfallsebene.

| α | λ^\perp | $\frac{D+A_1}{\lambda^\perp}$ | Mittel | t | α | λ^\perp | $\frac{D+A_1}{\lambda^\perp}$ | Mittel | t |
|----------|-----------------|-------------------------------|--------|-------|----------|-----------------|-------------------------------|--------|------------|
| 56° — | 479,9 519,6 | 0,041 0,039 | 0,040 | 24,2° | 57° — | 491,8 573,8 | 0,478 0,555 | 0,512 | 24,4° |
| 56 15 | 478,1 517,7 | 0,052 0,063 | 0,057 | | | 499,3 546,6 | 0,502 0,509 | | 24 |
| 56 30 | 477,2 516,1 | 0,095 0,074 | 0,084 | | | 506,1 | 0,514 | | 27,2 |
| 56 45 | 478,8 548,3 | 0,271 0,239 | 0,255 | 23 | 57 5 | 504,8 557,6 | 0,644 0,716 | 0,680 | 24,4 |
| | 519,4* | 0,189* | | 25,4 | 57 15 | 513,4 563,6 | 0,813 0,873 | 0,843 | 25 26,2 |
| 56 50 | 482,8 559,5 | 0,331 0,384 | 0,357 | 23,4 | 57 30 | 516,9 564,6 | 0,928 0,934 | 0,931 | |
| 56 55 | 491,7 565,7 | 0,456 0,455 | 0,455 | 23,7 | 57 45 | 514,5 562,8 | 0,960 0,977 | 0,968 | 26,9 |

Tabelle VIII.
Phasendifferenzen.
Optische Axe parallel der Einfallsebene.

| α | λ^\perp | $\frac{\Delta + \Delta_1}{\lambda^\perp}$ | Mittel | t | α | λ^\perp | $\frac{\Delta + \Delta_1}{\lambda^\perp}$ | Mittel | t | |
|----------|-----------------|---|--------|-------|----------|-----------------|---|--------|-------|-------|
| 56° 30' | 452,2* | 0,091* | 0,078 | 22,9° | 57° 10' | 488,0 | 0,445 | 0,468 | 27,7° | |
| | 501,3 | 0,065 | | | | 534,8 | 0,469 | | | |
| | 566,0 | 0,092 | | | | 512,0 | 0,457 | | | |
| 56 45 | 499,4 | 0,201 | 0,203 | 24,1 | | 558,5 | 0,494 | 0,507 | 23,6 | |
| | 555,6 | 0,206 | | | | 525,3 | 0,493 | | | |
| | | | | | | 609,4 | 0,517 | | | |
| 56 50 | 508,9 | 0,307 | 0,345 | 22,2 | | 454,3 | 0,522 | 24 | | |
| | 591,8 | 0,383 | | | | 508,9 | 0,508 | | | |
| | | | | | | 578,1 | 0,513 | | | |
| 56 55 | 516,3 | 0,395 | 0,417 | 22,6 | | 536,6 | 0,525 | 27,1 | | |
| | 598,3 | 0,440 | | | | 513,6 | 0,481 | | | |
| | | | | | | 559,3 | 0,498 | | | |
| 57 — | 519,7 | 0,425 | 0,440 | 23 | 57 15 | 517,1 | 0,533 | 0,552 | 28 | |
| | 601,3 | 0,466 | | | | 564,3 | 0,572 | | | |
| | 458,5 | 0,436 | | | 57 20 | 514,8* | 0,544* | 0,655 | 25,7 | |
| | 512,2 | 0,430 | | 25 | | 586,4* | 0,687* | | | |
| | 583,4 | 0,457 | | | | 510,2 | 0,609 | | | |
| | 510,4 | 0,407 | | | | 559,7 | 0,701 | | | |
| | 573,1 | 0,459 | | 57 40 | 524,7 | 0,931 | 0,943 | 28,7 | | |
| 57 5 | 521,4 | 0,445 | 0,468 | | 23,5 | | | | 574,5 | 0,956 |
| | 605,9 | 0,484 | | 58 — | 522,0 | 0,961 | 0,965 | 29,1 | | |
| | 486,4 | 0,486* | | | 570,9 | 0,969 | | | | |
| | 530,9 | 0,468 | | | | | | | | |
| | 534,1 | 0,486 | | | | | | | | |

Die beiden Tabellen zeigen einen merklichen Unterschied in der Grösse des „mittleren Haupteinfallswinkels von Glas und Quarz“ — wie ich den Einfallswinkel, für welchen $(\Delta + \Delta_1)/\lambda^\perp = 0,5$ ist, nennen will. Die in Columnne 4 für jeden Einfallswinkel berechneten Mittel aus den gemessenen Phasenänderungen sind sämmtlich in Tab. VII grösser, als in Tab. VIII. Man erhält in Tab. VII aus diesen Mitteln den „mittleren Haupteinfallswinkel von Glas und Quarz“ = 56° 59' für den Fall, dass die optische Axe des Quarzes senkrecht zur Einfallsebene steht, dagegen in Tab. VIII für diesen Winkel den Werth 57° 9' für den Fall, dass die optische Axe der Einfallsebene parallel ist. Da dieser Unterschied nicht von der isotropen Glasfläche herrühren kann, so muss man ihn einer Verschiedenheit des Haupteinfallswinkels am Quarz, jenachdem die optische Axe senkrecht oder parallel

zur Einfallsebene ist, zuschreiben. Die Quarzplatte und die Glasplatte sind beide im Herbst 1886, also etwa neun Monate vor diesen Versuchen geschliffen und mit dem gewöhnlichen Polirmittel (Eisenoxyd) polirt worden. Man muss daher annehmen, dass dieselben mit einer fremdartigen Oberflächenschicht behaftet waren. Diese Oberflächenschicht, welche wohl den absoluten Werth des Haupteinfallswinkels verändern mag, verdeckt also nicht die Verschiedenheit desselben je nach der Lage der optischen Axe zur Einfallsebene, trotzdem diese Verschiedenheit wegen der schwachen Doppelbrechung des Quarzes nur eine geringe ist. Dies hat seinen Grund wohl darin, dass die Oberflächenschicht in beiden Fällen den Haupteinfallswinkel in derselben Richtung verändert.

Ueber die elliptische Polarisation bei der Reflexion an doppelbrechenden Medien ist bisher nur wenig Experimentelles veröffentlicht worden.

Jamin gibt zwar in seiner Tabelle¹⁾ die Haupteinfallswinkel verschiedener doppelbrechender Substanzen an, doch immer für jede Substanz nur einen Werth desselben. Hr. K. Schmidt²⁾ hat die Reflexion am Quarz nicht in Bezug auf die Doppelbrechung untersucht. Uebrigens wäre es mit den bisherigen Methoden kaum gelungen, einen Einfluss der schwachen Doppelbrechung des Quarzes auf den Haupteinfallswinkel nachzuweisen, weil die Ungenauigkeit derselben in der Bestimmung des Einfallswinkels Beobachtungen von fünf zu fünf Minuten nicht zulässt.

Hr. E. Schenck³⁾ hat bei seinen Beobachtungen über die elliptische Polarisation bei der Reflexion an zwei einaxigen, electiv absorbirenden Krystallen, am Rothgültigerz und Magnesiumplatincyänür, auf die Lage der optischen Axe Rücksicht genommen; doch sind die complicirteren Verhältnisse jener Krystalle zur Vergleichung mit Quarz nicht geeignet.

1) Jamin, *Ann. de chim. et de phys.* (3) **29**, p. 303. 1850.

2) K. Schmidt, *Wied. Ann.* **29**, p. 451. 1886.

3) E. Schenck, *Wied. Ann.* **15**, p. 177. 1882.

Am besten lässt sich mein Resultat am Quarz mit den Beobachtungen Brewster's¹⁾ und Seebeck's²⁾ über die „Polarisationswinkel“ am Kalkspath und mit den Formeln, welche Neumann³⁾ für den „Polarisationswinkel“ an durchsichtigen einaxigen Krystallen abgeleitet hat, vergleichen.

Brewster hat zuerst am Kalkspath⁴⁾ eine Verschiedenheit des Polarisationswinkels je nach der Lage der reflectirenden Fläche und der Einfallsebene zur optischen Axe beobachtet. Er findet für den Polarisationswinkel φ einer gegebenen Fläche des Kalkspaths die empirische Gleichung:

$$\varphi = \alpha + (\beta - \alpha) \cdot \sin^2 \omega,$$

wo ω den Winkel zwischen Hauptschnitt und Einfallsebene, und wo α und β die Werthe des Polarisationswinkels, wenn der Hauptschnitt parallel und senkrecht zur Einfallsebene ist, bedeuten, und wo $\beta > \alpha$ ist. D. h. der Polarisationswinkel ist ein Maximum, wenn der Hauptschnitt senkrecht zur Einfallsebene, ein Minimum, wenn der Hauptschnitt derselben parallel ist.

Seebeck hat die Versuche Brewster's am Kalkspath wiederholt und vervollständigt. Er hat durch zahlreiche Messungen an natürlichen und geschliffenen⁵⁾ Flächen sowohl die Abhängigkeit des Polarisationswinkels vom Winkel zwischen Einfallsebene und Hauptschnitt (ω), als auch diejenige vom Winkel zwischen der reflectirenden Fläche und der optischen Axe ($90^\circ - \lambda$) untersucht, und fand für den Polarisationswinkel φ , zunächst für eine gegebene Fläche des Kalkspaths:

$$(1) \quad f(\varphi) = f(\alpha) \cdot \cos^2 \omega + f(\beta) \cdot \sin^2 \omega$$

und hierauf für α und β :

1) Brewster, Phil. Trans. p. 145. 1819.

2) Seebeck, Pogg. Ann. 21. p. 290. 1831.

3) Neumann, Abh. d. Berl. Acad., Math. Cl., p. 1. 1835.

4) Brewster hatte auch an einer Fläche des zweiaxigen Krystalls „chromate of lead“ (Bleichromat, Rothbleierz, krystallisirt monoklin) eine Verschiedenheit des Polarisationswinkels von $2^\circ 6'$ je nach der Lage der Einfallsebene beobachtet.

5) Hier hatte schon Seebeck mit dem Einfluss der vom Polirmittel herrührenden Oberflächenschicht zu kämpfen, den er schliesslich durch Anwendung von Kreide als Polirmittel auf ein Minimum beschränkte.

$$(2) \quad f(a) = f(a) \cdot \sin^2 \lambda + f(c) \cdot \cos^2 \lambda.$$

$$(3) \quad f(\beta) = f(b) \cdot \sin^2 \lambda + f(c) \cdot \cos^2 \lambda,$$

wobei a , b und c die Polarisationswinkel für eine der optischen Axe parallele Fläche, wenn die Einfallsebene parallel und senkrecht zur optischen Axe, und für eine zur optischen Axe senkrechte Fläche bedeuten. Seebeck fand eine genauere Uebereinstimmung der Formeln (1) bis (3) mit den Beobachtungen, wenn man für die Function f nicht wie Brewster für Formel (1) den Winkel selbst, sondern den sinus oder cotg desselben setzt — und entschied sich zunächst für den cotg.

Durch die Gleichungen (1), (2), (3) ist der Polarisationswinkel φ für jede beliebige Fläche (λ) und Lage der Einfallsebene (ω) gegeben, sobald a , b — die Polarisationswinkel in den zwei Hauptlagen an einer der optischen Axe parallelen, und c — der Polarisationswinkel an einer zur optischen Axe senkrechten Fläche bekannt sind. Die nächste Aufgabe war nun, diese drei Grössen durch die Constanten des Krystalls, den ordentlichen (n) und den ausserordentlichen Brechungsexponenten (m) auszudrücken. Seebeck fand folgende empirische Formeln:

$$(4) \quad \operatorname{tg} b = n, \quad (5) \quad \operatorname{tg} a = n \cdot \sqrt{\frac{m^2 - 1}{n^2 - 1}}, \quad (6) \quad \operatorname{tg} c = m \cdot \sqrt{\frac{n^2 - 1}{m^2 - 1}}.$$

In einer späteren Abhandlung¹⁾ hat Seebeck versucht, diese Formeln theoretisch zu begründen, und erhielt unter Zugrundelegung der Fresnel'schen Principien (ausser der Formel: $\operatorname{tg} b = n$) für den Fall, dass der Hauptschnitt mit der Einfallsebene zusammenfällt, die Gleichung:

$$(7) \quad \sin^2 \alpha = \frac{(1 - \mu^2) \cdot \sin^2 \lambda + (1 - \nu^2) \cdot \cos^2 \lambda}{1 - \mu^2 \cdot \nu^2},$$

$$\text{wobei:} \quad \frac{1}{\nu} = n; \quad \frac{1}{\mu} = m.$$

In dieser Gleichung sind die Formeln (5) und (6) enthal-

1) Seebeck, Pogg. Ann. 22. p. 126. 1831.

ten, wie man sich sofort überzeugt, wenn man $\lambda = 0$, und $\lambda = 90^\circ$ setzt; sie lässt sich auch so schreiben:

$$(8) \quad \sin^2. \alpha = \sin^2. a. \sin^2. \lambda + \sin^2. c. \cos^2. \lambda,$$

woraus man erkennt, dass die Gleichung (7) nichts anderes ist, als die Gleichung (2), in welcher für die Function f statt des \cotg das Quadrat des sinus zu setzen ist.

Eine allgemeine Gleichung für den Polarisationswinkel bei der Reflexion an durchsichtigen einaxigen Krystallen hat zuerst Neumann¹⁾ abgeleitet. Dieselbe geht für den Fall, dass Hauptschnitt und Einfallsebene zusammenfallen, in die Gleichung (7), — für den Fall: $\lambda = 90^\circ$, $\omega = 90^\circ$, in die Gleichung: $\operatorname{tg} b = n$ über. Die Formeln (4), (5), (6) sind somit von Neumann abgeleitet worden.

Für andere Azimuthe als $\omega = 0$ bleibt bei Neumann der Polarisationswinkel durch eine ziemlich complicirte Gleichung bestimmt, die indessen bei der Berechnung keine wesentlichen Abweichungen von den einfachen empirischen Formeln (1) und (3) zeigt und mit den Messungen Seebeck's ebenfalls gut übereinstimmt.²⁾

Ich stelle zunächst in Tab. IX die Polarisationswinkel a , b , c , welche Seebeck in den drei Hauptlagen beobachtet hat, mit denjenigen, welche er nach den Formeln (4), (5), (6) berechnet hat, zusammen.³⁾

Tabelle IX. (Kalkspath.)

| | a | b | c |
|---|----------|---|--|
| Berechnet: | 54° 3,4' | 58° 54,9' | 60° 47,1' |
| Gemessen: $\left\{ \begin{array}{l} 54 \quad 12,4 \\ 54 \quad 14,9 \end{array} \right.$ | | $\left\{ \begin{array}{l} 58 \quad 56 \\ 58 \quad 56,1 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 60 \quad 33,4 \end{array} \right.$ |

Ferner habe ich aus den Brechungsexponenten, welche

1) Neumann, Abh. der Berl. Acad. p. 1. 1835.

2) Neumann, l. c. p. 38 u. 39.

3) Die Zusammenstellung der übrigen von Seebeck beobachteten und berechneten Polarisationswinkel s. Pogg. Ann. 21. p. 309. 1831 und Pogg. Ann. 22. p. 135. 1831.

Rudberg¹⁾ für Quarz für die Fraunhofer'schen Linien *D*, *E*, *F* angibt, nach den Formeln (4), (5), (6) die Grössen *a*, *b*, *c* berechnet und in Tab. X zusammengestellt.

Tabelle X. (Quarz.)

| | <i>n</i> | <i>m</i> | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|----------|----------|----------|-----------|----------|-----------|
| <i>D</i> | 1,54418 | 1,55328 | 57° 20,2' | 57° 4,4' | 56° 57,8' |
| <i>E</i> | 1,54711 | 1,55631 | 57 23,2 | 57 7,4 | 57 0,8 |
| <i>F</i> | 1,54965 | 1,55894 | 57 25,9 | 57 9,9 | 57 3,3 |

Da Quarz positive Doppelbrechung besitzt, so ist für ihn $a > b > c$.

Die Differenz $a - b$ beträgt in der Tab. X etwa 16'. Meine Versuche ergeben $a > b$ und die Differenz der „mittleren Haupteinfallswinkel von Glas und Quarz“ in den beiden Lagen der optischen Axe = 10', was mit der aus den Formeln (4), (5), (6) berechneten Differenz $a - b$ sehr gut übereinstimmt, wenn man bedenkt, dass wegen der Ueber-einanderlagerung der Phasenänderungen an Glas und Quarz die Differenz der beobachteten „mittleren Haupteinfallswinkel“ kleiner sein muss, als die Differenz der Haupteinfallswinkel am Quarz.

Um die absoluten Werthe der Haupteinfallswinkel am Quarz in den drei Hauptlagen zu messen und mit den in Tab. X berechneten Werthen zu vergleichen, müsste bei der von mir benutzten, parallel zur optischen Axe geschliffenen Fläche, und bei einer zweiten, senkrecht zur optischen Axe geschliffenen Fläche vor der Untersuchung die fremdartige Oberflächenschicht mittelst des Wernicke'schen Gelatineverfahrens beseitigt werden.

Berlin, im Januar 1888.

1) Rudberg, Pogg. Ann. 14. p. 52. 1828.

**XI. Ueber einige einfache Gesetze, welchen der durch ein Prisma gehende Lichtstrahl gehorcht, und über das Minimum der Ablenkung;
von W. Hess.**

(Hierzu Taf. II Fig. 10–11.)

Selten wohl hat ein so einfaches Problem eine so vielseitige Beachtung gefunden, wie dasjenige der Minimalablenkung des durch ein Prisma gegangenen Lichtstrahls. Die häufige Wiederkehr seiner Behandlung dürfte dasselbe hierbei in erster Linie dem Wunsche nach einer elementaren Ableitung zu verdanken haben. (In der That finden sich in der Literatur auch nur einige wenige Bearbeitungen, welche sich zu seiner Ermittlung der von der Differentialrechnung gebotenen Methode bedienen; so einige Noten von Bauer¹⁾ — in denen theilweise frühere Darstellungen²⁾ vereinfacht oder modificirt werden — von Fabian³⁾ und verschiedene, in Lehrbüchern der Physik verbreitete Beweise.) Wenn ich mir nun erlaube, im Folgenden einen neuen Beweis solcher Art zu liefern, so geschieht es vornehmlich aus dem Grunde, weil ich glaube, dass die bisherigen Ableitungen nicht genügend Gewicht legen einerseits auf Strenge, andererseits auf Leichtverständlichkeit, bezw. Uebersichtlichkeit des Beweisverfahrens.

Sieht man nämlich von den Erörterungen ab, welche, auf der Anwendung des Unendlichkleinen beruhend, ihrem inneren Wesen nach einem höheren Calcül zuzuzählen sind⁴⁾, so lassen sich in der Folge der Elementarbeweise hauptsächlich zwei ganz verschiedene Richtungen verfolgen, eine trigonometrische und eine geometrisch-constructive.

1) Bauer, Pogg. Ann. 131. p. 472. 1867; 132. p. 658. 1868; Carl's Rep. 3. p. 28. 34. 377. 1867.

2) In Gehler's physik. Wörterbuch, Wilde's Geschichte der Optik. Kulp's Lehrb. der Physik.

3) Fabian, Carl's Rep. 9. p. 84. 1873.

4) Wie die citirten Noten von Bauer, die in ihrem zweiten Theil die Schreibweise Δ statt d anwenden oder unendlich kleine Grössen ϵ , δ statt der Decremente $d\alpha$, $d\beta$ einführen.

Die Reihe der ersteren beginnt mit Bary¹⁾, der nach Newton²⁾ wohl der erste war, welcher einen elementaren Beweisgang einschlug, indem er die Summe der Sinus des Einfallswinkels und Austrittswinkels auf den Sinus der halben Winkelsumme transformirte. Es ist dies genau derselbe Gedanke, auf den Eisenlohr³⁾ und später auch Berg⁴⁾ ihre Verfahren gründeten, während Radau⁵⁾ abweichend hiervon das Quadrat des Sinus der halben Winkelsumme bildete. Eine Abhandlung von Lommel⁶⁾ verwendet statt der besprochenen Summe der Sinus deren Differenz und Product, eine solche von Hesehus⁷⁾ die Sinus von Winkeln, welche von der symmetrischen Lage abweichen, eine solche von Schellbach⁸⁾ endlich den sogenannten Cosinussatz in einem Dreiecke, welches in einem Kreise vom Radius Eins liegend gedacht wird. Auch die Darstellung in der neueren Ausgabe des Müller-Pouillet'schen Lehrbuches⁹⁾ ist im wesentlichsten Theil eine trigonometrische. Allgemein wird man aber zugestehen können, dass die Vornahme trigonometrischer Umformungen und die Verfolgung von Beziehungen zwischen der Aenderung von Argument und Function nicht geeignet sein dürften, den Beweis übersichtlich zu gestalten.

Unter diesem Umstande haben die geometrischen Beweise weniger zu leiden. Kann dies auch nicht gerade von der ersten aller elementaren Behandlungen, der Newton'schen¹⁰⁾ gesagt werden, so doch sicherlich von den neueren

1) Bary, Pogg. Ann. 26. p. 170. 1832.

2) Newton, s. unten.

3) Eisenlohr, Schlömilch's Zeitschr. 12. p. 438. 1867. Reproducirt in Wüllner's Lehrb. u. Compend. d. Physik u. a.

4) Berg, Pogg. Ann. 158. p. 651. 1876.

5) Radau, Carl's Rep. 4. p. 184. 1868.

6) Lommel, Pogg. Ann. 159. p. 139. 1876.

7) Hesehus, Fortschr. d. Phys. 37. p. 382. 1881.

8) Schellbach, Wied. Ann. 14. p. 367. 1881.

9) Müller-Pouillet, Lehrb. 2. p. 85. 8. Aufl. 1879.

10) Newton, Lect. opt. P. I. Sect. II. N. 29—36. Es mag an dieser Stelle als nicht uninteressant bemerkt werden, dass gegen die Newton'sche Methode der Minimalablenkung von Euler (reflexions sur la manière d'examiner la refraction du verre par les moyens des prismes. Mém.

Constructionen von Radau¹⁾, Eisenlohr²⁾, Lommel³⁾, Kessler⁴⁾, welche sich sämmtlich auf dem zuerst von Reusch⁵⁾ ausgesprochenen Gedanken aufbauen, den Gang des Lichtstrahls vom Mittelpunkt zweier concentrischer Kreise aus zu verfolgen, deren Radien je gleich sind der Längeneinheit Eins und dem Brechungsexponenten n . (Insofern ist denn auch ein neuerlicher Vorschlag von Lermontow⁶⁾ viel zu spät gekommen.) Diese Erörterungen haben aber alle zum mindesten das Missliche, dass sie den Vorgang der Ablenkung von Figuren verfolgen, welche als solche mit der einfachen und klaren Grunddarstellung im Prisma nichts zu thun haben⁷⁾, abgesehen noch von der Anwendung complicirender Hülfslinien, deren sie sich bedienen müssen.

Diesem Uebelstande soll der nachfolgende Beweis abzu-
helfen versuchen; derselbe ergibt sich unmittelbar aus eini-
gen sehr einfachen Gesetzen, welchen der durch ein Prisma
tretende Lichtstrahl Genüge leistet. Letztere mögen deshalb
zunächst der Reihe nach angeführt werden.

I. *Der in ein Prisma eintretende und der aus demselben austretende Lichtstrahl sind beide von dem Schnittpunkte des Eintritts- und Austrittslothes gleichweit entfernt. Sie berühren also einen Kreis, welcher um diesen Schnittpunkt beschrieben ist.*⁸⁾

de Berlin 1766) Bedenken erhoben wurden, als wenn dieselbe das Ablesen der Winkel besonders fehlerhaft gestalte. Dementgegen zeigte Newton, dass gerade in der Minimalstellung als einer extremen Lage die Fehler am kleinsten ausfallen müssten.

1) Radau, Pogg. Ann. 118. p. 452. 1865 u. Carl's Rep. 4. p. 84. 1868.

2) Eisenlohr, Lehrb. d. Phys. p. 278. 1870.

3) Lommel, Pogg. Ann. 156. p. 578. 1875.

4) Kessler, Fortschr. d. Phys. 36. p. 398. 1880.

5) Reusch, Pogg. Ann. 117. p. 241. 1862.

6) Lermontow, Beibl. 11. p. 32. 1887.

7) Die beiden Most'schen Beweisversuche (Pogg. Ann. 139. p. 505 u. 141. p. 601. 1870), deren erster von Kurz (ibid. 140. p. 758. 1870) übrigens einer rectificirenden Bemerkung unterstellt wurde, benutzen zwar die Grundfigur, können aber keinen Anspruch auf Strenge erheben.

8) Dieser Satz ist so einfach, dass es mich wundern sollte, wenn derselbe nirgends verzeichnet wäre. Doch habe ich trotz sorgfältiger Durchforschung der Literatur nichts darauf Bezügliches finden können. Ueber die einzigen mir im Originale nicht zugänglichen Abhandlungen von Gri-

Beweis: Seien OS der einfallende, OO' der gebrochene, SO' der austretende Strahl, in der gewöhnlichen Weise gezeichnet (Fig. 10), und $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$ die Einfall- und Brechungswinkel, so verlangt zunächst das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} (= n), \quad \text{oder auch:}$$

$$(1) \quad \sin \alpha \sin \beta' = \sin \alpha' \sin \beta.$$

Bezeichnen nun OQ und $O'Q$ die beiden Lothe und QR , bezw. QR' die Entfernungen ihres Schnittpunktes vom einfallenden Strahl OS , bezw. dem austretenden SO' , so ist doch:

$$QR = OQ \cdot \sin \alpha, \quad QR' = O'Q \cdot \sin \alpha',$$

$$\text{also:} \quad QR : QR' = (OQ \sin \alpha) : (O'Q \sin \alpha').$$

Im $\triangle OO'Q$ verhält sich aber nach dem Sinussatze:

$$OQ : O'Q = \sin \beta' : \sin \beta,$$

$$\text{also folgt:} \quad QR : QR' = (\sin \alpha \cdot \sin \beta') : (\sin \alpha' \cdot \sin \beta),$$

$$\text{und nach (1):} \quad QR = QR'.$$

Durch das also bewiesene Gesetz erlangt man das denkbar einfachste Mittel, sowohl zur Erzeugung des austretenden Strahls, als auch zur Entscheidung über die Möglichkeit des letzteren.

Um den aus einem Prisma austretenden Lichtstrahl constructiv sofort zu erhalten, beschreibe man um den Schnittpunkt des Incidenz- und Emergenzlothes einen Kreis, welcher die Richtung des einfallenden Strahls berührt, und lege an diesen Kreis vom Austrittspunkt aus eine Tangente. — Der Strahl tritt aus dem Prisma thatsächlich aus, wenn dieser Kreis die Austrittsfläche des letzteren gar nicht schneidet; er verlässt das Prisma als streifender Strahl, sobald der Kreis die Prismenfläche berührt; er wird endlich gar nicht austreten können, sondern totale Reflexion erleiden, sobald der Kreis die Austrittsfläche in zwei Punkten durchsetzt.

Diese Sätze sind blosse Corollare des Hauptsatzes. Nach

maldi, Buzzolini und Vanni in der Rivista scient.-industr. (12, 15 u. 16) lauten die Referate in den „Fortschr. d. Phys.“ und den „Beiblättern“ derart kurz, dass ich annehmen zu dürfen glaube, nichts wesentlich Neues in denselben vorzufinden.

letzterem sind die verschiedenen Abhandlungen und Lehrbüchern beigegebenen Figuren als unrichtig zu bezeichnen.

I_a. Verbindet man den Scheitel des Ablenkungswinkels mit dem Schnittpunkte des Ein- und Austrittslothes, so halbirt diese Verbindungslinie stets das Supplement des Ablenkungswinkels.¹⁾ (Es bilden also für jedes Prisma der ein- und austretende Strahl mit der Halbierungslinie des Ablenkungswinkels und mit der Verbindungslinie zwischen dem Scheitel des letzteren und dem Schnittpunkt der optischen Lothe vier harmonische Strahlen.)

Der Beweis ergibt sich daraus, dass nunmehr die rechtwinkligen Dreiecke RSQ und QSR' congruent und demgemäss die Winkel:

$$RSQ = QSR' = x = 90^\circ - \frac{\delta}{2} \quad \text{sind.}$$

II. Legt man durch die brechende Kante eines Prismas und den Schnittpunkt der zwei optischen Lothe eine Ebene, so kommt der Scheitel des Ablenkungswinkels stets auf diejenige Seite der Ebene zu liegen, auf welcher sich der grössere unter den zwei Winkeln des Ein- und Austritts befindet.

Zum Beweise dessen ist vorerst zu constatiren, dass in der bislang benutzten Figur 10, welche $\alpha' > \alpha$ annimmt, der halbe Strahlenwinkel x kleiner sei als der Winkel ξ — dann ist ξ Aussenwinkel für x , und S liegt rechts von QC .

Nun ist bekanntlich aus dem Dreieck OSO' :

$$\sphericalangle \delta = (\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') = (\alpha + \alpha') - (\beta + \beta'),$$

$$\text{also:} \quad \sphericalangle x = 90^\circ - \frac{\delta}{2} = 90^\circ + \frac{\beta + \beta'}{2} - \frac{\alpha + \alpha'}{2}.$$

Im Kreisviereck $OCO'Q$ aber ist:

$$\sphericalangle OQC = \sphericalangle OO'C = 90^\circ - \beta' \quad \text{und} \quad \sphericalangle SOQ = \alpha,$$

$$\text{also folgt:} \quad \sphericalangle \xi = 90^\circ + \beta' - \alpha.$$

Soll nun: $x < \xi$ sein, so muss:

$$\frac{\beta + \beta'}{2} - \frac{\alpha + \alpha'}{2} < \beta' - \alpha, \quad \beta - \beta' < \alpha' - \alpha$$

1) Dieser Supplementswinkel wurde von Reusch (l. c.) „Strahlenwinkel“ geheissen — ein Name, der ganz bezeichnend ist.

sein, was in der That der Fall ist: denn die rechte Seite dieser Ungleichheit ist der Voraussetzung zufolge positiv, die linke aber, da zum kleineren Einfallswinkel auch der kleinere Brechungswinkel gehört, wesentlich negativ.

Wäre $\alpha > \alpha'$, so würde eine ganz analoge Deduction zu dem Ergebniss führen, dass S links von QC liegen müsse. Man hat aber gar nicht nöthig, dieselbe durchzuführen: eine einfache Drehung der Fig. 10 aus ihrer Ebene heraus um 180° in Fig. 11 gibt hierüber sofortige Gewissheit.¹⁾

III. *Die Ablenkung des ein Prisma durchlaufenden Lichtstrahls ist am kleinsten, wenn der Scheitel des Ablenkungswinkels in die Ebene fällt, welche durch die brechende Kante und den Schnittpunkt des Ein- und Ausfallslotthes bedingt ist; für diesen Fall durchläuft der Strahl das Prisma symmetrisch.*

Denn δ ist am kleinsten, wenn x am grössten ist. x ist aber stets kleiner als ξ und erreicht seinen Maximalwerth ξ nur dann, wenn S in QC liegt. Dann darf weder $\alpha' > \alpha$, noch $\alpha > \alpha'$ sein, d. h. es muss $\alpha = \alpha'$ sein, woraus nach (1) auch $\beta = \beta'$ folgt.

Zur Begründung des Satzes III sind, wie man erkennt, nur die beiden Sätze I_a und II sammt ihren kurzen Beweisen nöthig gewesen.

Bamberg, im Juli 1888.

1) Diese Drehung dürfte sich auch zur objectiven Darstellung empfehlen: ist Fig. 10 auf ein transparentes Stück Papier mit etwas kräftigen Strichen aufgetragen, so ergibt der Anblick der hinteren Papierfläche unmittelbar Zeugniß von der Existenz der Fig. 11. Etwaigen Zweifeln bezüglich der Begriffe Eintritt und Austritt kann man dabei begegnen, indem man auf dieser Hinterfläche mit anderer Farbe eine Umnumerirung der accentuirten und nicht accentuirten Buchstaben vornimmt, wie sie auch in Fig. 11 geschah.

XII. *Electrolyse des Kupferchlorürs;* *von F. Quincke.*

Nach dem Faraday'schen¹⁾ Gesetze verhalten sich bei verschiedenen Electrolyten die Mengen der vom electrischen Strom ausgeschiedenen Stoffe wie die chemischen Aequivalente. Erscheint also bei Salzen der basische und metallische Bestandtheil an der Kathode, der saure an der Anode, so muss der Strom auf dieselbe Menge Anion aus den Oxydverbindungen eine andere Menge Metall²⁾ (bei Cu und Hg die doppelte Menge) abscheiden, wie aus den Oxydverbindungen; das Metall würde somit verschiedene Aequivalente zeigen.

Den — eigentlich einzigen — experimentellen Beweis für eine solche Ausscheidung, wo jede Möglichkeit einer secundären Wirkung ausgeschlossen scheint, hat Buff³⁾ durch die Zersetzung geschmolzenen Kupferchlorürs zu geben versucht, indem er denselben Strom durch ein Kupfervoltameter und mit zwei eintauchenden Drähten durch Kupferchlorür leitete, das in einem Glasrohr geschmolzen und zur Entfernung etwa gebildeten Chlorids mit Kupferspähen digerirt worden war. Ein Wägen der Kathodenplatte des Voltameters und des Anodenkupferdrahtes des Chlorürs ergab dann die Menge des aus der Kupfersulfatlösung niedergeschlagenen Kupfers annähernd halb so gross, als die Gewichtsabnahme des Drahtes war. Die Zunahme des Kathodendrahtes zu bestimmen, gelang ihm nicht, wegen der raschen, dendritenartigen Ausbreitung des abgeschiedenen Kupfers und wegen der Schwierigkeit, das anhaftende Chlorür zu entfernen.

Um diesen Versuch mit völlig reinem Kupferchlorür zu wiederholen, wurde in einem Viertelliterkolben mit aufgesetztem Kautschukventil Kupferchlorid in concentrirter Salzsäure unter Zusatz von Kupferspähen zwei Stunden gekocht,

1) Faraday, Exp. Res. (5) § 505. 1833.

2) Vgl. G. Wiedemann, Electricität. 2. Aufl. 1883. II. § 601. 604.

3) Buff, Lieb. Ann. 110. p. 257. 1859.

wobei das rein weisse Chlorür theils sofort, theils beim Erkalten, theils auf Wasserzusatz krystallinisch ausfiel. Das Chlorür wurde dann so schnell, dass die Zersetzung an der Luft sich nur in einem hellgelben, oberflächlichen Schimmer zeigte, auf ein Filter gebracht, mit der Luftpumpe abgesogen und rasch in einen kleinen, später direct zur Electrolyse benutzten Porzellantiegel eingeschmolzen. Es erstarrt zu einer braunen Masse mit hell krystallinischem Bruch, die beim Erhitzen stark verdampft, an den Wänden des Tiegels emporkriecht und einen Theil seiner Aussenseite, indem sie sich zersetzt, mit rothem, metallischem Kupfer bedeckt. Wie das kystallinische, zersetzt sich auch das geschmolzene Chlorür bei längerem Stehen an der Luft und überzieht sich — wohl unter Bildung von Chlorid und Oxychlorid — mit einer grünen feuchten Schicht; im Exsiccator ist es dagegen Monate lang haltbar.

Die Electrolyse des Kupferchlorürs wurde mit spiralförmigen Electroden aus blankem Kupferdraht ausgeführt. Bei schwacher Rothgluthhitze wurde das Chlorür in dem Porzellantiegel geschmolzen; derselbe war, um das Verdampfen zu beschränken, mit einer doppelt durchbohrten Porzellan- oder Glimmerplatte bedeckt, durch welche die Electroden-drähte gingen. Der Strom von zwanzig, bei den beiden letzten Versuchen von vier Chromsäureelementen ward gleichzeitig durch eine Tangentenbussole, ein Kupfer- und ein Silber-voltameter geführt. Die Kathode des letzteren war ein Platin-tiegel mit dünnem, galvanoplastischem Silberüberzug; der Tiegel wurde mit zehnprocentiger Silbernitratlösung gefüllt; die Anode bildete ein cylindrischer Stab geschmolzenen Silbers, der in einen kleinen Thoncyylinder tauchte, um abfallende Silbertheilchen aufzufangen. Gewichtszunahme der Kathode und Gewichtsabnahme der Anode waren nahezu gleich gross. Die spiralförmigen Kupferdrähte wurden bei Versuch 2 durch Eintauchen in eine geschmolzene Mischung von Chlornatrium und Chlorkalium, bei Versuch 4 durch Abspülen mit nicht zu starker Salzsäure, sonst durch mehrstündiges Liegen in kalter Ammoniakflüssigkeit vom anhaftenden Kupferchlorür befreit.

Die Resultate der electrolytischen Versuche fasst folgende Tabelle zusammen; die vierte Spalte gibt die Kupfermenge, welche der Gewichtszunahme der Silberkathode äquivalent ist.

| Nr. | Strom | | Cu | Kupferchlorür | | Cu gefund. | |
|-----|-------|--------|----------|---------------|---------|------------|---------|
| | Dauer | Stärke | berechn. | Anode | Kathode | Anode | Kathode |
| | min | Amp. | gr | gr | gr | | |
| 1 | 30 | 0,6001 | 0,3544 | 0,6385 | 0,4681 | 1,858 | 1,320 |
| 2 | 20 | 4804 | 1891 | 2810 | 927 | 1,486 | 0,490 |
| 3 | 10 | 3944 | 776 | 1704 | 1065 | 2,195 | 1,372 |
| 4 | 10 | 4572 | 900 | 2383 | 100 | 2,648 | 0,111 |

Die Zahlen schwanken zu sehr, um bestimmte Schlüsse ziehen zu lassen; besonders gross sind die Unregelmässigkeiten bei der Kathode, während die Durchschnittssumme der vorletzten Columnne zufällig einen dem Buff'schen ähnlichen Werth ergibt, nämlich 2,047.

Die Schwankungen rühren zum Theil von einer Auflösung der Kupferelectroden im Kupferchlorür her, die nach einstündigem Eintauchen, ohne galvanische Kette, einen Gewichtsverlust von 0,2033 und 0,2790 gr zeigten. Gleichzeitig scheiden sich im oberen Theile der Salzmasse an der Oberfläche der Kupferdrähte feine Kupfernadeln ab, mögen die Drähte ausserhalb des Salzes metallisch verbunden sein oder nicht. Diese Ausscheidung von Cu wird veranlasst durch das spontane Auftreten eines electrischen Stromes, der schon beim Einschalten einer gewöhnlichen Tangentenbussole zu erkennen war, und der in Stärke und Richtung grosse Schwankungen zeigte; derselbe schien von einer ungleichen Erwärmung der Salzmasse herzurühren.

Die Electrolyse des Kupferchlorürs kann also nicht zur Bestimmung des Aequivalentes des Kupfers benutzt werden und keinen Beweis für die Ausscheidung eines Doppeläquivalentes erbringen.

Physik. Inst. der Univ. Heidelberg, im October 1888.